

Capítulo xx

Midiendo el Sistema Solar desde el aula

En este capítulo se recrean métodos geométricos clásicos, combinados con las herramientas que nos proveen las nuevas tecnologías (TICs), para estimar distancias astronómicas a partir de observaciones simples. En particular, nos proponemos determinar el radio de la Tierra, la distancia de la Tierra a la Luna, al Sol y a algunos planetas interiores. Asimismo, nos proponemos estimar los diámetros del Sol y de la Luna. También proponemos dos actividades para obtener la tercera ley de Kepler a partir de datos de sistema solar y un ejercicio para determinar la constante de Hubble. Las técnicas propuestas para estas estimaciones hacen uso de imágenes digitalizadas de eclipses disponibles en Internet o bien tomadas oportunamente durante algún eclipse de Luna. El objetivo que perseguimos es intentar responder a las preguntas, ¿cómo sabemos esto?, ¿por qué sostenemos aquello? La técnica propuesta ilustra un modo de combinar los métodos de la antigüedad clásica con las tecnologías modernas.

Objetivos

- ✓ Estimación de distancias astronómicas
- ✓ Estimación de radio de la Tierra
- ✓ Tamaño de la Luna
- ✓ Distancia Tierra-Luna
- ✓ Distancias del sistema solar
- ✓ Tercera ley de Kepler
- ✓ Constante de Hubble y estimación de la edad del universo

Introducción

Cuando observamos un eclipse de Luna, la sombra proyectada por la Tierra sobre la Luna revela la forma esférica de la Tierra y además nos da una idea del tamaño de nuestro planeta comparado con el de la Luna (ver Figura xx.1). Ésta fue una de las observaciones en la que se basó Aristóteles (384 a.C.–322 a.C.) para argumentar la redondez de la Tierra. **Aristarco de Samos** (310 a.C.–250 a.C.) fue también uno de los grandes filósofos griegos que contribuyó significativamente a la comprensión de la posición de la Tierra en el cosmos. Fue un precursor del modelo heliocéntrico del Sistema Solar y se desempeñó como director de la famosa Biblioteca de Alejandría, uno de los centros de estudio más importantes del mundo clásico. Aristarco ideó un ingenioso método para medir el tamaño de la Luna y su distancia a la Tierra comparando el tamaño de la sombra de la Tierra con el de la Luna durante un eclipse lunar. Por simple observación visual, Aristarco estimó que el diámetro de la sombra de la Tierra era aproximadamente el doble del diámetro lunar.

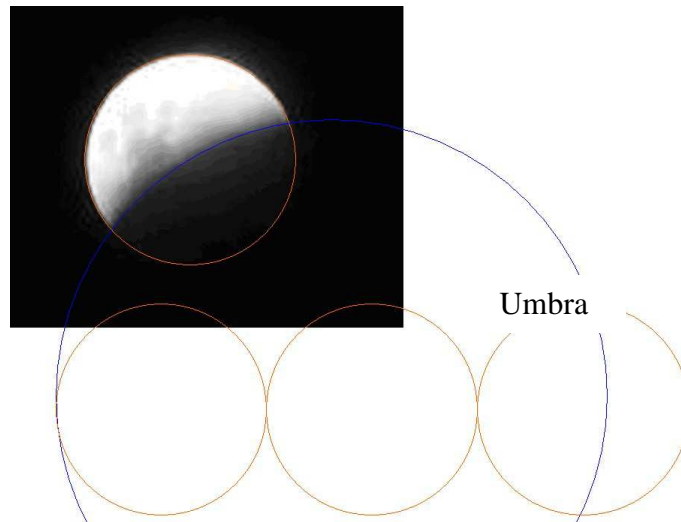


FIGURA XX.1. Fotografía correspondiente al eclipse lunar del 20 de febrero del 2008. La Luna está en la umbra de la Tierra. Se ha trazado una circunferencia para completar la sombra de la Tierra.

Dada la posibilidad de fotografiar estos eventos o de obtener estas fotos de eclipses en Internet,¹ resulta muy simple e instructivo usar la tecnología moderna para recrear y mejorar las estimaciones de Aristarco. En la Fig.xx.1 se ilustra una foto de un eclipse lunar ocurrido el 20 de febrero de 2008 en la Ciudad de Buenos Aires obtenidas con una cámara digital común. Utilizando programas de graficación comunes instalados en la mayoría de las computadoras personales es posible realizar mediciones a partir de fotogramas^{2,3} como el de la Figura xx.1.

Proyecto 22. Determinación del tamaño de la Luna y su distancia a la Tierra - Aristarco

Equipamiento recomendado: Una fotografía digital de un eclipse parcial de luna. Para ello puede fotografiar un eclipse o bajar de Internet una foto de este tipo.

- ✓ Usando la técnica descrita más arriba, Figura xx.1, determine la relación entre el tamaño (diámetro) de la sombra de la Tierra y la Luna.

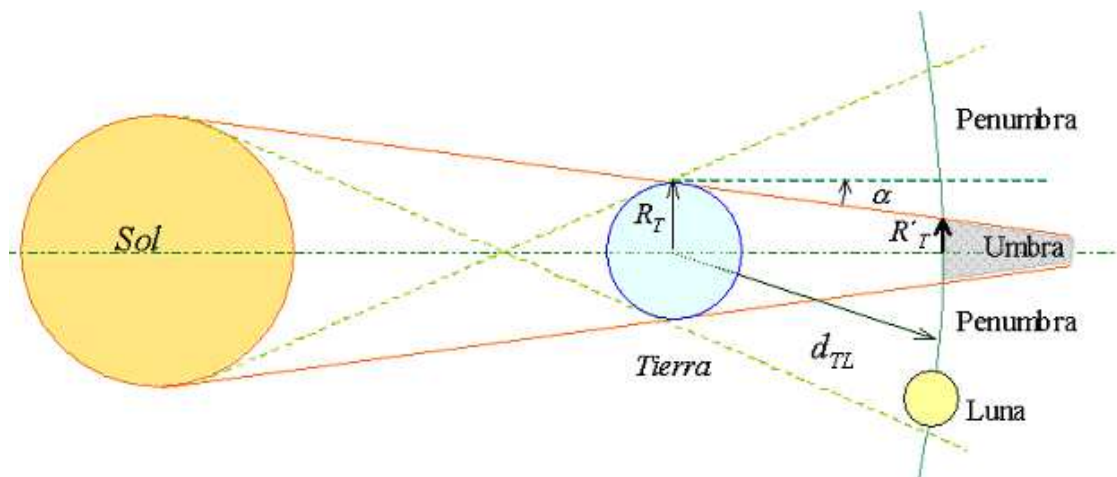


Figura xx.2. Sistema Sol, Tierra y Luna. R_T es el radio de la Tierra y R'_T el de su sombra a una distancia igual al de la Tierra a la Luna (d_{TL}). α es al ángulo de apertura del cono de sombra de la Tierra (umbra).

Nótese que el radio de la Tierra R_T no es el mismo que el radio R'_T de la sombra de la Tierra. Debido al gran tamaño del Sol comparado con el de la Tierra, la zona más oscura de la sombra (umbra) de la Tierra tiene una forma cónica como se ilustra en la Figura xx.2. Hacia el año 240 a.C., **Erastóstenes** midió el radio terrestre, R_T . El valor aceptado actualmente para el radio terrestre es $R_T = 6.371 \text{ km}$.⁴

Cuando observamos un eclipse total de Sol⁵, la Luna alcanza a eclipsar al Sol en forma muy ajustada, por lo tanto resulta claro que el diámetro aparente (o los ángulos subtendidos) de la Luna y el Sol son iguales como se muestra en la Fig. xx.3. Por lo tanto:

$$\alpha = R_L / d_{TL} = R_S / d_{TS} \quad . \quad (\text{xx.1})$$

Aquí R_S y d_{TS} son el radio del Sol y la distancia Tierra-Sol respectivamente y 2α es el ángulo subtendido por la Luna. Un modo de estimar α es tomar una pantalla opaca (de metal o plástico) y realizar una perforación circular de diámetro d_h conocido. Una manera práctica y sencilla de fabricar la pantalla consiste en usar una tarjeta plástica como las de compra o crédito y, con una mecha de tamaño conocido (de 1 o 2 mm), perforar la misma.

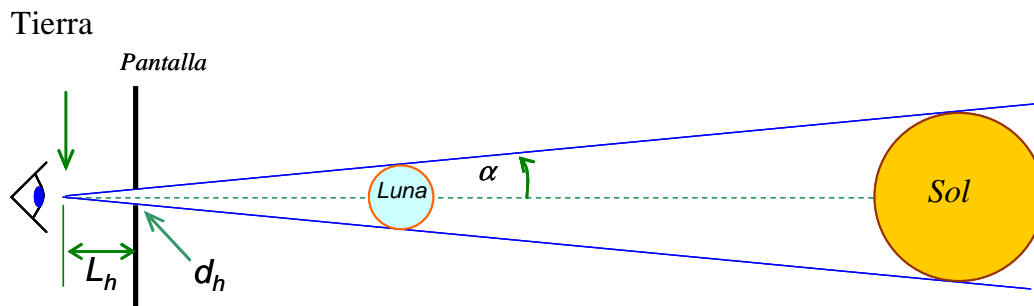


Figura xx.3. Tamaño aparente o ángulo sustentado por la Luna y el Sol desde la Tierra

Sosteniendo la pantalla con la mano y mirando la Luna a través del orificio, el ángulo subtendido se logra cuando la totalidad de la Luna coincide con el tamaño de la perforación. Se mide la distancia L_h de la pantalla a nuestro ojo y se calcula el ángulo α ,

$$\alpha = \frac{d_h}{2L_h} \approx \frac{1}{210} \text{ rad} , \quad (\text{xx.2})$$

Como tenemos que:

$$2\alpha = 2R_L / d_{TL} . \quad (\text{xx.3})$$

Por lo tanto, conociendo el tamaño de la Luna, R_L , podemos estimar también su distancia a la Tierra, d_{TL} .

Actividad

- ✓ Determine el mejor valor de α , ángulo subtendido por la Luna.
- ✓ Del análisis de una (o más) foto de un eclipse de Luna, y los valores de α y R_T que se proveen, estime el tamaño de la Luna, R_L , y su distancia a la Tierra, d_{TL} . Para esta primera parte puede suponer que el tamaño de la sombra de la Tierra es igual al de la Tierra, o sea: $R_T \approx R'_T$. (Ver Fig. xx.2).

- ✓ A partir del análisis de la foto de un eclipse, similar a la Fig. xx.1, determine el mejor valor del cociente: $k = R'_T/R_L$ y estime su incertidumbre. Usando el esquema geométrico ilustrado en la Figura xx.2, demuestre que:

$$R_T = R'_T + \alpha \cdot d_{TL} \quad (\text{xx.4})$$

Combinando este resultado con (xx.3), obtenga nuevamente los valores de R_L y d_{TL} .

- ✓ Compare los valores obtenidos por usted con los valores aceptados para estas magnitudes.^{4,5} ¿Qué puede concluir de este análisis?

Proyecto 23. Estimación del radio terrestre

Eratóstenes fue director de la biblioteca de Alejandría durante el Siglo III a.C. y él era filósofo, astrónomo, historiador, geógrafo, poeta, crítico teatral, matemático y deportista. Se dice que ya en uno de sus viajes de Grecia a Alejandría, le llamó la atención el modo que usaban los navegantes para orientarse de noche usando las estrellas. Como así también el hecho que la estrella que los navegantes usualmente tomaban como referencia, en particular la estrella polar (norte), se veía más alta cuando estaban en Grecia que cuando estaban en Alejandría y que lo contrario sucedía con el Sol al medio día.

Estando en la biblioteca de Alejandría leyó un relato acerca de que en la ciudad de Syene (unos 800 km al sureste de Alejandría [31°11'N, 29°55'E], actualmente Asuán o Aswan [24°05'N, 32°54'E]), el 21 de junio al medio día (solsticio de verano), el Sol iluminaba totalmente (sin sombra) un pozo profundo. Esto era algo que no ocurría en Alejandría ni en Grecia. Usando este dato (ausencia de sombra al medio día del solsticio de verano en Syene), el ángulo al que observaba el Sol en ese mismo momento en Alejandría y la distancia entre estas dos ciudades, fue capaz de hacer la primera determinación del radio de la Tierra. Su experimento es una actividad clásica, frecuentemente recreado en las escuelas.⁶

En esta sección queremos proponer un método muy simple y fácil de realizar, que se lleva a cabo desde un edificio alto (7 pisos o más) o desde una loma que esté cerca del mar o un gran lago.⁷ El esquema del experimento se ilustra en la Figura xx.4.

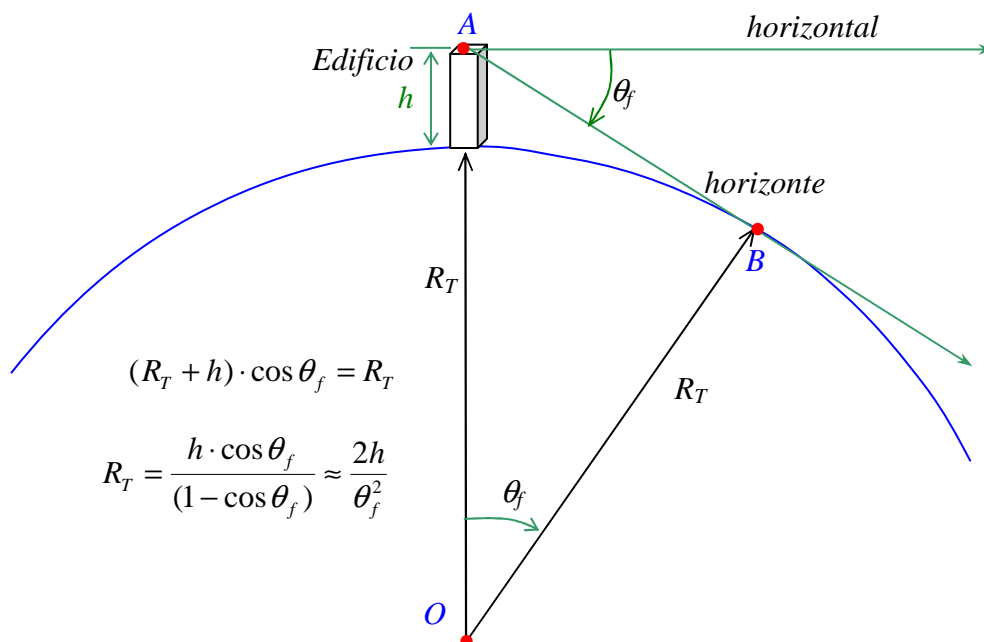


Figura xx.4. Esquema experimental para medir el radio terrestre R_T .

En la Figura xx.4, h es la altura del edificio o loma, respecto del nivel del mar. Este valor puede se puede obtener usando un alfiler, que se calibra colocándolo en la playa al nivel del mar. Luego se lo coloca junto a una mira telescópica que se usa para medir (Figura xx.5), y se estima la altura h . Otra alternativa, es usar el programa Google Earth, se ubica la zona del edificio o loma con el mouse y el programa permite conocer la latitud, la longitud y la elevación del terreno respecto al nivel del mar. La altura del edificio puede obtenerse de planos o por medición directa. Por ejemplo, usando un peso atado a un piolín, o por medición del largo de la sobra del edificio comparada con la sombra de un poste vertical, cuya altura se conoce.

El otro parámetro importante a determinar es el ángulo entre la horizontal y el horizonte, θ , ver Fig.xx.5. Para ello se sugiere un arreglo experimental consistente en una mira telescópica con retículo de cruz, como la de un rifle, o un telescopio o un teodolito, montado sobre un trípode. Una regla graduada en milímetros se coloca a una distancia conocida s de algunos metros respecto del la mira telescópica. Con una manguera de plástico transparente y flexible lleno de agua, se realiza una marca en la regla que define la línea horizontal, es decir se nivela la mira del telescopio con una marca bien visible sobre la regla. Seguidamente, se posiciona la cruz del retículo de la mira telescopia en el horizonte (línea divisoria mar-aire). Se varía el enfoque de la mira, sin modificar el ángulo de la misma, hasta divisar claramente la regla y se realiza una nueva marca sobre la regla, que define una la distancia Δy en la misma. Con este valor se puede estimar θ_f a través de $\tan \theta_f = \Delta y/s$, y su incertidumbre $\Delta \theta_f$.

De la geometría del problema, ver Fig.xx.4, tenemos:

$$(R_T + h) \cdot \cos \theta_f = R_T, \quad \text{por lo tanto: } R_T = \frac{h \cos \theta_f}{(1 - \cos \theta_f)} \approx \frac{2h}{\theta_f^2}. \quad (\text{xx.5})$$

De este modo, conociendo h y θ_f podemos calcular el radio de la Tierra, R_T .

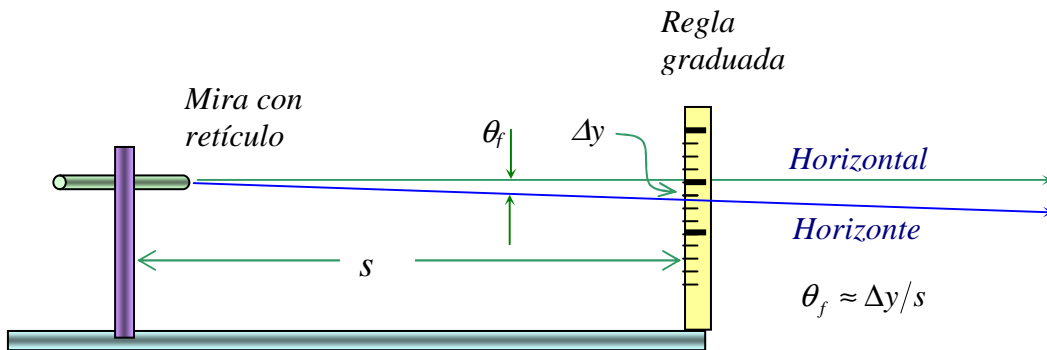


Figura xx.5. Esquema experimental para medir el radio terrestre.

Hay, sin embargo, un punto importante a tener en cuenta cuando miramos desde lo alto de un edificio o montaña al horizonte, los rayos de las visuales que llegan hasta el ocular de la mira o el ojo, no siguen necesariamente una línea recta. Esto es consecuencia de que el índice de refracción del aire varía con la presión. Por su parte, la presión atmosférica varía con la altura. De hecho, los alfileros más

comunes utilizan esta propiedad para determinar alturas. Para alturas menores que unos 4 km sobre el nivel del mar, la presión se puede calcular usando un modelo de atmosfera isotérmica:^{8,9}

$$P(z) = P_0 \cdot \exp(-z / h_{00}), \quad (\text{xx.6})$$

donde P_0 es la presión a nivel del mar (≈ 1 atm), z es la altura vertical en metros y $h_{00} = R.T/Mg \approx 8420$ m a una temperatura media de unos 15 °C, donde R es la constante universal de los gases, T la temperatura absoluta de la atmósfera, M es la masa molecular (promedio) del aire y g la aceleración de la gravedad. Si $z \ll h_{00}$, es decir estamos cerca de la superficie de la Tierra, $P(z) = P_0 (1 - z/h_{00})$, o sea que la presión barométrica disminuye a una tasa de 12 Pa/m.

Por su parte el índice de refracción, n , de un gas se puede escribir como:^{8,9}

$$n(z) = \sqrt{K} = \sqrt{1 + 2c \cdot P} \approx 1 + cP(z), \quad (\text{xx.7})$$

Aquí, K es la constante dieléctrica del aire que depende del número de moléculas por unidad de volumen, que a su vez depende de la presión barométrica (absoluta), la constante c depende del sistema de unidades, si P se mide en atmósferas, $c = 1.00029$. Esto significa que al variar el índice de refracción con la altura, la trayectoria de los rayos seguirá una trayectoria ligeramente curva, como se indica en la Fig. xx.6. Ver anexo A. El ángulo θ_i medido con el telescopio, como se describió anteriormente, será en general algo menor que el ideal θ_f .

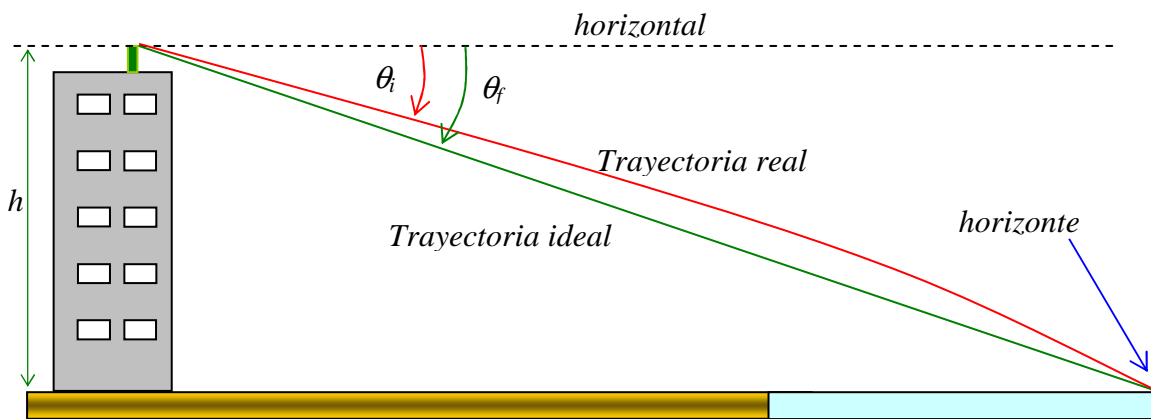


Figura xx.6. Trayectoria esquemática de los rayos de luz.

Existen expresiones teóricas que se pueden usar para estimar el valor del ángulo ideal θ_f (el que haría un rayo que viajase en línea recta al horizonte) a partir del medido θ_i . Un resultado que se puede usar es:⁷

$$\delta = \theta_f - \theta_i = A \operatorname{sen} \left\{ \operatorname{sen}(\alpha_i) \left[\frac{(1 + D e^{-z_i/h_{00}})}{(1 + D e^{-\beta \cdot z_f/h_{00}})} e^{(z_i - z_f)/R_T} \right] \right\} - A \operatorname{sen} \left\{ \operatorname{sen}(\alpha_i) \left[e^{(z_i - z_f)/R_T} \right] \right\}, \quad (\text{xx.8})$$

donde $D = P_0 c$, y z_i y z_f son las alturas iniciales, o sea $z_i = h_0$ y $z_f = 0$; R_T es una estimación preliminar del radio terrestre ($R_T \approx 6371$ km). Esta corrección mejora considerablemente la estimación del radio de la Tierra, ya que expresión (xx.4), sin la corrección (xx.8), sobrestima R_T en casi un 15%. Usando la

corrección (xx.8), el resultado puede mejorar considerablemente. En el anexo A de este capítulo se ofrece una justificación heurística de esta corrección.

Radio Terrestre

Equipamiento recomendado: Una mira telescópica, con retículo en forma de cruz montado sobre un trípode. Una regla milimetrada de unos 40 cm de largo. Un nivel o una manguera de plástico transparente con agua. Acceso a una loma o edificio de al menos 25 o 30 m de altura, con vista al mar.

- ✓ Usando la técnica discutida más arriba, determine el valor del radio terrestre R_T y estime la incerteza de su determinación.

Proyecto 24. Determinación del tamaño de la Luna y su distancia a la Tierra – Hiparco

Algunos años después que Aristarco hiciese las primeras estimaciones del tamaño y distancia a la Luna, **Hiparco de Nicea** (190 a.C.–120 a.C.) ideó un cálculo del diámetro lunar más preciso que el de Aristarco. Hiparco nace poco antes de la muerte de Eratóstenes y más tarde le sucede en la dirección de la Biblioteca de Alejandría. La idea de Hiparco consiste en inferir la relación del tamaño de la Luna, respecto de la sombra de la Tierra, a partir de la observación de los tiempos involucrados durante un eclipse lunar, en vez de los tamaños relativos como lo hizo Aristarco.

El método de Hiparco se basa en que durante un eclipse lunar el módulo de la velocidad de la Luna, v_L , es constante. Para obtener resultados coherentes con el método de Hiparco, es importante que la trayectoria de la Luna pase por el centro de la sombra de la Tierra, condición que no siempre se cumple¹.

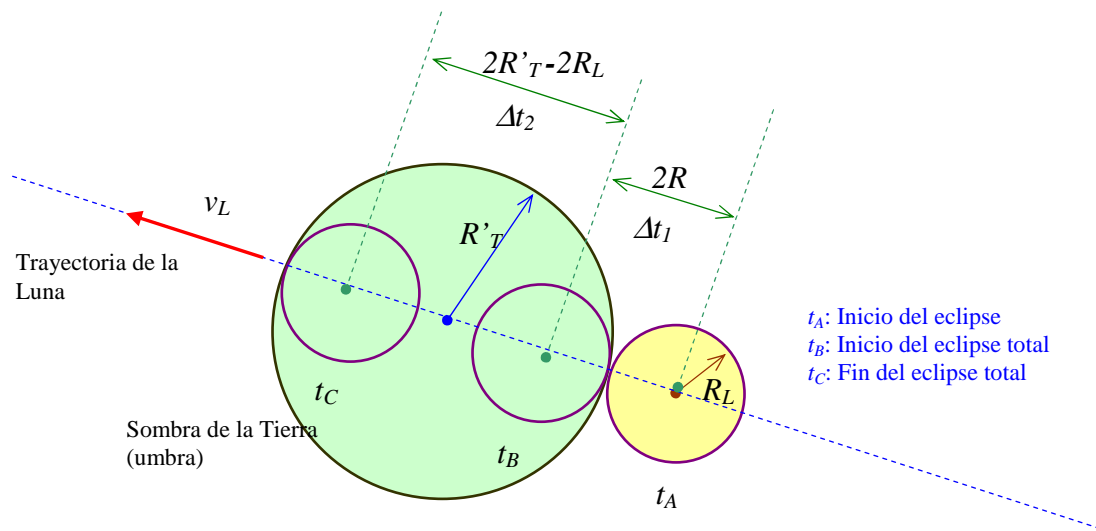


Figura xx.7. Esquema de un eclipse lunar. R'_T es el radio de la sombra de la Tierra y R_L es el radio de la Luna. Para aplicar el método de Hiparco, es importante que la trayectoria de la Luna pase por el centro de la sombra de la Tierra.

Es sencillo encontrar un eclipse que cumple esta condición en el catálogo de eclipses lunares de la NASA como el representado en la Fig. xx.8. Analizando la Fig. xx.8 y considerando la constancia del módulo de la velocidad de la Luna, tenemos:

$$v_L = \frac{2R'_T - 2R_L}{(t_C - t_B)} = \frac{2R_L}{(t_B - t_A)}, \quad (\text{xx.9})$$

definiendo los intervalos de tiempo (ver Fig. 10):

$$\Delta t_1 = t_B - t_A; \quad \Delta t_2 = t_C - t_B; \quad \text{y} \quad \Delta t_3 = t_C - t_A = \Delta t_2 + \Delta t_1 \quad (\text{xx.10})$$

tenemos:

$$\frac{R'_T - R_L}{\Delta t_2} = \frac{R_L}{\Delta t_1} = \frac{R'_T}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \quad (\text{xx.11})$$

o bien:

$$R'_T / R_L = k = \Delta t_3 / \Delta t_1 \quad (\text{xx.12})$$

Método de Hiparco

Equipamiento recomendado: Obtenga datos de eclipses reales similares a los indicados en la Fig. xx.8, que se pueden encontrar en la página de internet de la NASA.¹

- ✓ Utilizando los datos del eclipse ilustrado en la Fig. xx.8 o similares, estime el tamaño de la Luna y su radio aplicando el método de Hiparco. ¿Cómo se comparan estos resultados con los obtenidos con el método de Aristarco? ¿Cuál método le parece más preciso y por qué?
- ✓ Compare los valores obtenidos por usted con los valores aceptados para esas magnitudes. ¿Qué puede concluir de este análisis?

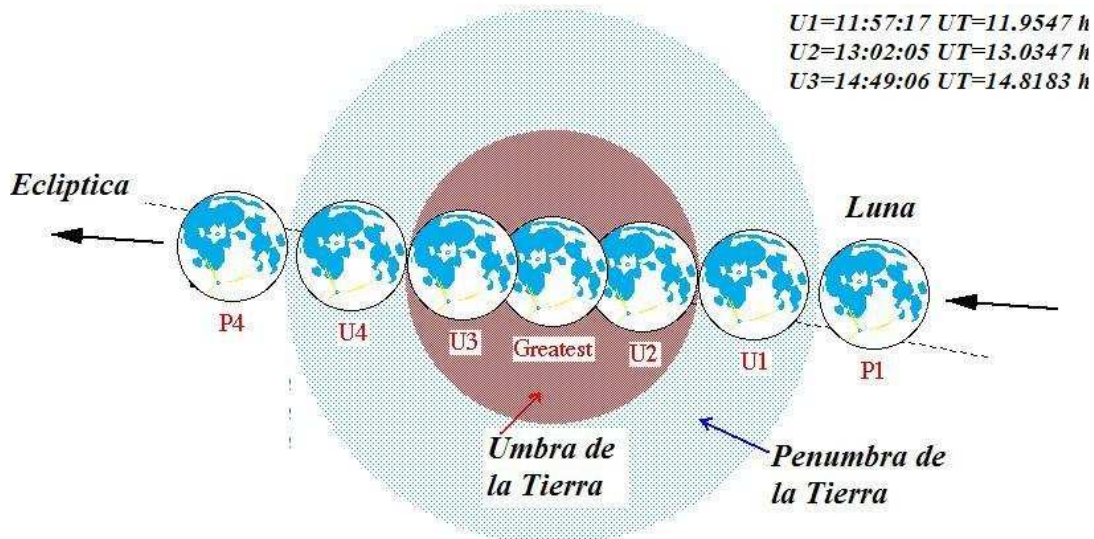


Figura xx.8. Información del eclipse del 16 de julio de 2000 colectada por NASA¹. El tiempo de U1 a U2 ($\Delta t_1 = 1,080 \text{ h}$) es el tiempo de oscurecimiento de la Luna. El tiempo entre U2 y U3 es la duración del eclipse total ($\Delta t_2 = 1,7836 \text{ h}$). En este eclipse, la trayectoria de la Luna pasa muy próxima al centro de la sombra de la Tierra.

Proyecto 25. Distancia Tierra-Sol

Aristarco de Samos no solo estimó el tamaño de la Luna, sino que además ideó un ingenioso esquema para medir la distancia al Sol. En la Fig. xx.9 se representa la posición de la Luna en dos fases complementarias: cuarto creciente y cuarto menguante. Cuando la Luna está en estas posiciones, el triángulo formado por el Sol, la Luna y la Tierra es rectángulo, como se aprecia en el dibujo. Esto ocurre tanto en cuarto menguante como en cuarto creciente¹⁰.

Si el Sol estuviese infinitamente alejado de la Tierra ($d_{ST} \gg d_{TL}$) estas dos posiciones se alcanzarían a la mitad del período de traslación de la Luna alrededor de la Tierra. El método propuesto por Aristarco para medir el ángulo β de la Fig. xx.9 consiste en medir el tiempo T_c entre las posiciones complementarias, o sea, el tiempo entre cuarto menguante y cuarto creciente. Dado que el módulo de la velocidad de la Luna es aproximadamente constante se deduce que:

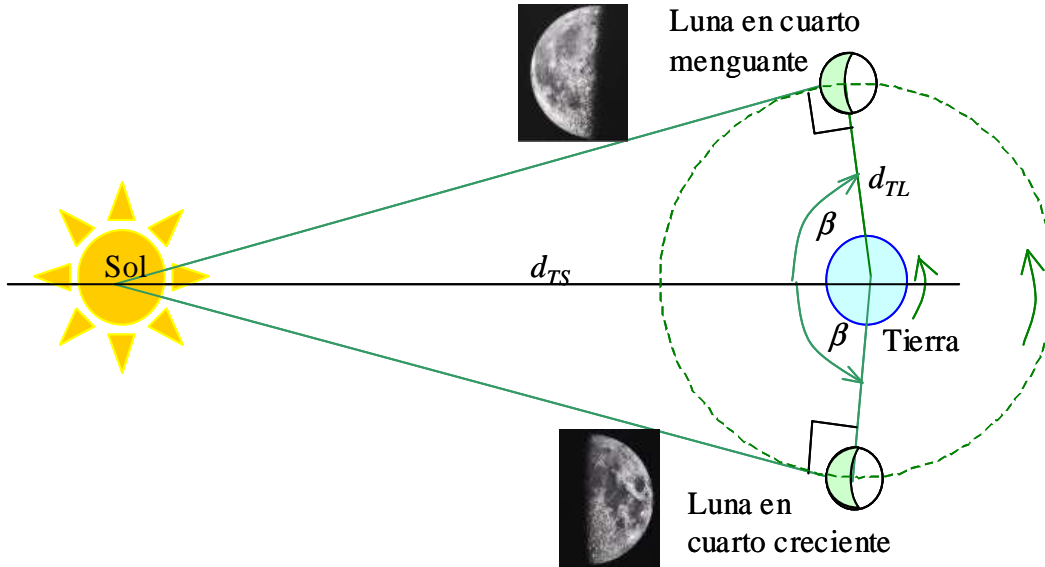


FIGURA xx.9. Fases de la Luna. d_{TS} es la distancia Sol-Tierra, β es el ángulo para el cual la Luna está en cuarto menguante (CM) y en cuarto creciente (CC) son complementarias. La suma de las mitades da la Luna completa.

$$\frac{2\beta}{360^\circ} = \frac{T_C}{T_{luna}} \quad (xx.13)$$

Usando esta técnica, Aristarco concluyó que $\beta \approx 87^\circ$. Por lo tanto, de la resolución de los triángulos correspondientes:¹⁰

$$\cos \beta = d_{TL}/d_{ST} \Rightarrow \cos(87^\circ) \approx 0.052 \approx 1/19, \quad (xx.14)$$

o sea:

$$d_{ST} \approx 19d_{TL}. \quad (xx.15)$$

Si tomamos para $T_C = 14.5$ días (nótese que para ver la Luna en cuarto creciente y luego en cuarto menguante debe transcurrir un número entero de días más medio día, ya que la Luna está de lados opuestos a la Tierra en estas dos fases). Con este dato de T_C resulta $\beta \approx 88.4^\circ$ y $d_{ST}/d_{TL} \approx 35$. Hoy sabemos que la relación $d_{ST}/d_{TL} \approx 400$ y por lo tanto $\beta \approx 89.85^\circ$. La precisión necesaria para medir este ángulo es del orden de $0,02^\circ$ y con el método de Aristarco es casi imposible lograr esta precisión. Lo interesante de este método es que ofreció por primera vez un modo para estimar la distancia de la Tierra al Sol, y además logró estimar aproximadamente el orden de magnitud de esta distancia. La limitación de este procedimiento es que la mínima variación de ángulo posible de medir es $1/2$ día,¹⁰ lo que produce que la menor diferencia de ángulo posible capaz de medirse es $\Delta\beta \approx (0.5d/29d) \cdot 360^\circ \approx 7^\circ$. Con lo cual, lo más que podemos decir es que $d_{TS}/d_{TL} > 19$.

Como se indicó previamente, los ángulos subtendidos por el Sol y la Luna desde la Tierra son idénticos. De este hecho se deduce que $R_L/d_{TL} = R_s/d_{ST}$, de donde obtenemos:

$$\text{Radio del Sol (km)} = R_s = (d_{ST} / d_{TL}) \cdot R_L \geq 33000 \text{ km} . \quad (\text{xx.16})$$

El valor aceptado¹¹ para el radio del Sol es $R_s = 6.955 \times 10^5 \text{ km}$.

Actividad

- ✓ Tomando como base que $T_c = 14.5$ días y utilizando el método de Aristarco, estime el valor de la relación d_{TS} / d_{TL}
- ✓ Analice en la bibliografía otros métodos que permitan mejorar la medición de d_{TS} / d_{TL} .

Proyecto 26. Distancia Venus-Sol y Mercurio-Sol

Venus es el segundo planeta del Sistema Solar y, junto con el Sol y la Luna, uno de los tres cuerpos celestes que puede ser visto de día. Es visible en las cercanías del Sol, a veces en los amaneceres y otras en los atardeceres. La *elongación* de un planeta se define como la separación angular entre la visual al Sol y la visual a dicho planeta. Para Venus, la elongación tiene un máximo que ocurre cuando el Sol, Venus y la Tierra forman un triángulo rectángulo como el que se muestra en la Fig. xx.10. Una situación análoga ocurre con Mercurio, pero este planeta no es visible tan fácilmente como Venus.

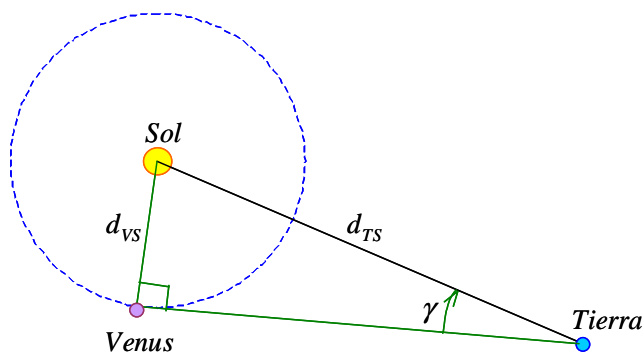


FIGURA xx.10. Posición de Venus en su punto de máxima elongación o separación angular respecto del Sol. Observacionalmente esto ocurre cuando Venus está más alejado del Sol en el cielo y parece estacionario, ya que se mueve a lo largo de una línea recta respecto de la Tierra. El triángulo formado por el Sol, Venus y la Tierra es rectángulo.

El ángulo de máxima elongación puede obtenerse fácilmente con un telescopio, observando la posición de Venus a lo largo del tiempo. En realidad cuando se observa a Venus con un telescopio, se pueden ver fácilmente sus fases, similares a las de la Luna. En particular, en la posición de elongación máxima, la fase de Venus es similar a un cuarto creciente o menguante. Para simplificar el método y hacerlo susceptible de emplear el mismo en el aula, nuestra propuesta consiste en utilizar alguno de los múltiples programas de astronomía que se pueden adquirir en el mercado u obtenerse gratuitamente de Internet. Para determinar el ángulo y el momento en que esto ocurre podemos utilizar el programa

Win Stars 2.0¹² o algún otro similar. También es posible usar datos de las efemérides de los planetas que están disponibles en Internet.¹³ Este programa permite simular el movimiento orbital de los planetas (Fig. xx.11) y determinar el momento en que Venus (o Mercurio) están en su posición de máxima elongación. También puede ser útil utilizar simulaciones del movimiento de estos planetas, disponibles en varios sitios de internet, en particular en Astronomy Education de la University of Nebraska.⁴ De este programa puede obtenerse la fecha de ocurrencia, la posiciones angulares del Sol y los planetas con lo que podemos determinar el ángulo γ (ver Fig. xx.10). En particular, esta situación ocurrió con Venus el día 14 de enero del 2009. El ángulo de máxima elongación resulta: $\gamma = 46^\circ \pm 2^\circ$ (ver Fig. xx.11), con lo cual resulta:

$$d_{VS} = d_{TS} \text{sen} \gamma . \quad (\text{xx.17})$$

Considerando que distancia Tierra-Sol, d_{TS} , también llamada UA (Unidad Astronómica), es de 149.6×10^6 km, obtenemos $d_{VS} = (106 \pm 3) \times 10^6$ km . Este valor es razonable ya que la distancia conocida es de $(108,2 \pm 0,1) \times 10^6$ km .^{4,14,17}

De igual manera podemos proceder para hallar la distancia de Mercurio al Sol. Para el día 26 de abril de 2009, el ángulo de máxima elongación de Mercurio fue $\gamma = 19^\circ$ con lo cual resulta: $d_{SM} = 50 \times 10^6$ km . Este valor es razonable ya que la distancia conocida es de 57.9×10^6 km .^{4,14}

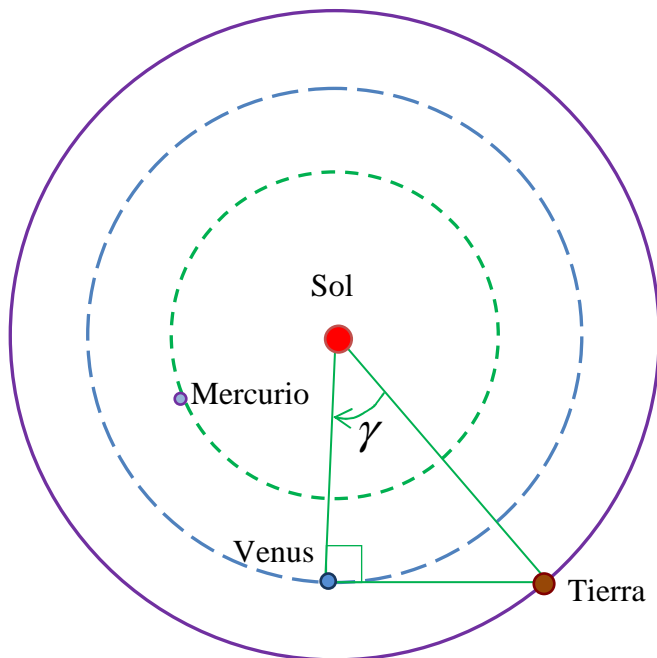


Figura xx.11. Esquema que muestra las posiciones respectivas del Sol, Venus y Tierra, obtenidas por simulación en el software Winstar 2.0. Las posiciones corresponden al 14 de enero del 2009 y el ángulo de elongación máxima γ puede medirse sobre la pantalla u obtenerse a través de las especificaciones provistas por el programa para el planeta a estudiar en dicha fecha.

Un hecho notable se observa cuando se analiza una tabla de elongaciones para Venus y Mercurio para distintas ocurrencias de las máximas elongaciones^{14,15} debido a que éstas

varían constantemente, en particular para el caso de Mercurio. Si el modelo Copernicano de órbitas circulares, centradas en el Sol fuese correcto, estas elongaciones deberían ser siempre las mismas. El hecho que no lo sean indican claramente que las órbitas de los planetas no están bien descritas por el modelo de Copérnico y debemos adoptar otro modelo más adecuado. De hecho, estas variaciones de las máximas elongaciones pueden ser usadas para trazar las órbitas de los planetas, y “descubrir” que son elípticas, tal como lo establece el modelo de Kepler. De hecho esta actividad se describe en la referencia [16].

Actividad

- ✓ Tomando como base datos de las efemérides de los planetas, o bien algún programa de simulación de la posición de los planetas, estime el valor de los ángulos de máxima elongación para Mercurio y Venus.
- ✓ Con estos datos estime la distancia del Sol a cada uno de estos planetas.
- ✓ Compare los resultados obtenidos con los valores aceptados para estos parámetros.
- ✓ Investigue algún otro método para medir estas distancias y compare con el método discutido aquí.

Proyecto 27. Distancia a otros planetas

El método propuesto en la última sección no puede usarse para los planetas más externos a la Tierra. Es posible sin embargo usar un método geométrico muy simple, basado en la observación de los tiempos en que los planetas están en oposición (es decir alineados del mismo lado del Sol o sea su elongación es 180°) y cuando están en cuadratura (las visuales al Sol y al planeta forman un ángulo de 90° o sea la elongación del planeta es de 90°).

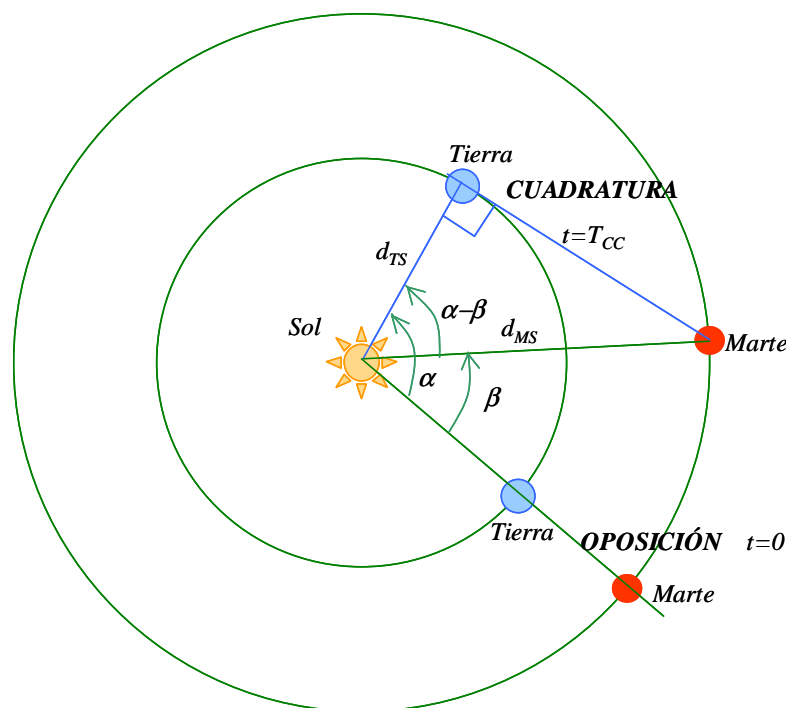


Figura xx.12. Posiciones del Sol, la Tierra (T) y un planeta exterior, por ejemplo Marte (M) en dos momentos: en oposición y en cuadratura. La diferencia de tiempo entre estos dos sucesos consecutivos (cuadratura y oposición) lo denotamos por T_{CC} .

En la Fig. xx.12 se muestran estas dos situaciones para la Tierra y Marte. De esta figura es claro que:

$$d_{MS} = d_{TS} / \cos(\alpha - \beta). \quad (\text{xx.18})$$

Para determinar los ángulos α y β se mide el tiempo, T_{CC} , entre la oposición y la cuadratura. Si Los períodos siderales de la Tierra y Marte son T_{Tierra} y T_{Marte} respectivamente, tenemos:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{T_{CC}}{T_{Tierra}} \quad \text{o} \quad \alpha = 360^\circ \times (T_{CC} / T_{Tierra}), \quad (\text{xx.19})$$

y

$$\beta = 360^\circ \times (T_{CC} / T_{Marte}). \quad (\text{xx.20})$$

Combinando estas dos últimas expresiones con la Ec. (xx.18) podemos determinar las distancias a todos los planetas del sistema solar³. Las fechas entre la oposición y la cuadratura de los planetas se pueden obtener en Internet^{4,17} o a partir de programas de simulación del movimiento planetario.^{13,18}

Actividad

- ✓ Tomando como base datos de las fechas entre la oposición y cuadratura de Marte, obtenido de Internet⁴ o a partir de programas de simulación del movimiento planetario, estime los valores de los ángulos α y β (Ec.xx.18).
- ✓ Con estos datos estime la distancia del Sol a Marte.
- ✓ Compare los resultados obtenidos con los valores aceptados para este parámetro.
- ✓ Es posible aplicar este método para estimar la distancia a los otros planetas exteriores.
- ✓ Investigue algún otro método para medir estas distancias y compare con el método discutido aquí.

Proyecto 28. Aplicaciones a la Astronomía y a la Astrofísica. Leyes de Kepler y Ley de Hubble

Actividad

- ✓ Usando los datos de la Tabla xx.1, grafique la duración del año planetario, T_p , en función de su distancia al Sol, d_s . Usando escalas lineales y logarítmicas, describa la dependencia de T_p con d_s .

- ✓ La Tercera Ley de Kepler^ε postula que el cuadrado del período, T_p^2 , es proporcional al cubo de la distancia, d_s^3 . ¿Sus resultados avalan o refutan esta ley?
- ✓ En muchas áreas de las ciencias encontramos leyes de conservación, como las leyes de conservación de la energía o el momento. Estas leyes establecen que determinadas cantidades no varían antes ni después de un dado proceso, o son las mismas a lo largo del tiempo o al pasar de un objeto a otro de un sistema. En ese sentido, la Tercera Ley de Kepler establece que, la relación T_p^2 / d_s^3 es una constante para todos los planetas del sistema solar, es decir esta cantidad se “conserva”. A partir de los datos de la Tabla xx.1, establezca la validez o no de esta aseveración. ¿Sus datos avalan o refutan esta ley?
- ✓ Una hipótesis consistente con las leyes de Newton es suponer que si los planetas se mueven en órbitas circulares, o casi circulares, existe una fuerza que ejerce el Sol sobre los planetas y que los atrae hacia el centro, una fuerza centrípeta. Supongamos que esa fuerza “gravitatoria” tiene una dependencia con la distancia r al Sol de la forma: $F_{grav} = k/r^n$, donde n es un número real, por ahora desconocido. Según sabemos, para que un objeto se mueva en una órbita circular de radio r y de periodo T , la fuerza centrípeta necesaria para que se mantenga en esa órbita es:

$$F_{cent} = F_{grav} \Rightarrow m \cdot \omega^2 r = m \cdot 4\pi^2 r / T^2 = k / r^n, \quad (xx.21)$$

aquí m representa la masa del planeta en estudio y r su distancia al Sol. De esta relación se deduce que:

$$r^{n+1} / T^2 = 4\pi^2 k / m. \quad (xx.22)$$

Comparando este resultado con su análisis gráfico, deduzca el valor del exponente n de la fuerza gravitatoria y cómo debe depender la constante k con m para que se cumpla la Tercera Ley de Kepler para todos los planetas del sistema solar.

- ✓ Compare sus resultados con lo que se conoce de la fuerza gravitatoria. ¿Se puede concluir que las Leyes de Kepler conducen a la ley de la Gravitación Universal de Newton?

Planetas	Distancia al Sol (Km)	Órbita (días)
Mercurio	5.79×10^7	87.97
Venus	1.08×10^8	224.70
Tierra	1.50×10^8	365.26
Marte	2.28×10^8	686.98
Júpiter	7.78×10^8	4 328.90

^ε Johannes Kepler (1571 - 1630), fue un astrónomo y matemático alemán; conocido por sus leyes sobre el movimiento de los planetas alrededor del sol . Fue colaborador de Tycho Brahe, a quien sustituyó como matemático imperial de Rodolfo II.

Saturno	1.43×10^9	10 752.90
Urano	2.87×10^9	30 663.65
Neptuno	4.50×10^9	60 152.00
Plutón	5.91×10^9	90 717.10

Tabla xx.1. Distancia media al Sol de los distintos planetas del Sistema Solar y sus respectivos periodos de rotación alrededor del Sol (duración del año).

Proyecto 29. **Expansión de Universo y Big Bang. ¿Cómo sabemos esto? ¿Cuándo ocurrió?**

Edwin Hubble^φ, junto a su asistente Milton Humason^Υ, hicieron uno de los descubrimientos más notables de la ciencia. Usando el telescopio de 100'' de Monte Wilson, California, descubrieron que los espectros de la luz proveniente de las galaxias lejanas estaban sistemáticamente “corridos al rojo”.

Esto es consecuencia del efecto Doppler.^{8,9} Cuando una galaxia se acerca a nosotros, la frecuencia de la luz proveniente de ella aumenta, es decir la luz aparece azulada (“blue shift”). Esto es análogo a cuando una fuente sonora se acerca a nosotros, su frecuencia aumenta en forma proporcional a su velocidad; si la fuente se aleja, la frecuencia del sonido se hace más grave o sea disminuye en forma proporcional a su velocidad. De igual forma, cuando una galaxia se aleja de nosotros, la frecuencia de la luz proveniente de ella disminuye (se vuelve más roja, “red shift”) en forma proporcional a su velocidad de alejamiento.

^φ E. Hubble nació en Missouri en 1889, en su juventud fue un atleta y boxeador destacado, pero en los primeros años de la universidad se comenzó a interesar por las matemáticas y la astronomía. Sin embargo, consiguió una beca para estudiar leyes que lo convirtió en abogado. Después de practicar esta profesión por algún tiempo, regresó a la Universidad de Chicago y obtuvo un doctorado en astronomía en 1917. Antes de iniciar su trabajo como astrónomo en Monte Wilson, sirvió como oficial en la primera guerra mundial.

^Υ M. Humason solo fue a la escuela hasta el octavo grado. Trabajaba como mulero durante la construcción del Observatorio del Monte Wilson; en esa época el transporte de las piezas se hacía con mulas y burros. Cuando terminó la construcción de observatorio se la ingenió para conseguir un puesto de conserje. Pero era un hombre curioso, inteligente y muy interesado en su trabajo, siempre preguntaba a los astrónomos sobre lo que hacían. De este modo pronto aprendió a usar el telescopio y Hubble lo tomó como su colaborador. Su trabajo contribuyó significativamente al descubrimiento que el Universo está en expansión.

Distancia (MPc)	Velocidad (Km/s)	Distancia (MPc)	Velocidad (Km/s)
2.05	308	27.6	2,000
2.07	96	28.2	990
4.66	467	28.7	780
4.68	255	30.7	1,790
8.3	732	31.7	2,400
9.9	519	34.9	1,800
13.0	731	39.0	3,200
13.5	943	45.7	3,860
15.6	1,310	46.1	4,700
16.1	940	48.9	2,900
16.6	1,580	50	3,860
19.3	940	58	3,220
20.8	1,790	82	4,270
24.4	1,790	84	5,120
25.5	1,370	86	8,680
26.4	2,746	90	5,120
26.5	2,320	111	6,920
		158	9,620

Tabla xx.2. Velocidad de alejamiento de las galaxias lejanas en función de su distancia. Las velocidades están en km/s y las distancias en Mega Parsec (Mpa) que equivalen a 3 millones de años luz, o sea $1 \text{ Mpa} = 3.0857 \times 10^{19} \text{ km}$. (Datos tomados de la publicación original de Hubble y Humason.)

Lo notable del descubrimiento de Hubble y Humason es que encontraron que todas las galaxias presentaban un “red shift” o sea que todas parecían alejarse de nosotros, con una velocidad (medida por el corrimiento de su espectro al rojo) tanto mayor cuanto más alejada estaba. En la Tabla xx.2 se muestra una lista parcial de los datos de Hubble.

- ✓ Utilizando estos datos, grafique la variación de la velocidad de alejamiento de las galaxias lejanas como función de su distancia. ¿Qué tipo de dependencia observa? ¿Pueden estos datos describirse por una relación lineal?
- ✓ Si la dependencia de la velocidad v en función de la distancia d es lineal, es decir si $v = H d$, determine el valor de H en unidades de km/s/Mpc y en $1/\text{s}$.
- ✓ Una consecuencia interesante de la relación $v = H d$ es que, si observamos el universo actual, el universo se está expandiendo. Por lo tanto, en el pasado debe haber sido más pequeño. Si hacemos “retroceder la película” hacia atrás, podemos preguntarnos hace cuánto tiempo T_{BB} , una dada galaxia que hoy está a una distancia d_0 , estaba junto a nosotros. Si la velocidad de alejamiento fue constante, podemos decir que $T_{BB} = d_0/v = d_0/(H d_0) = 1/H$. Por lo tanto, si $v = H d$, el tiempo T_{BB} no depende de la distancia d_0 y es igual para todas las galaxias. En otras palabras, T_{BB} mide el tiempo en que todas las galaxias estaban juntas, incluyendo la nuestra. A partir de ese momento el universo estuvo en expansión, como lo observamos en el presente. Por lo tanto, $T_{BB} = 1/H$ representa el tiempo en el que se inició el universo o sea, ¡el momento del Big Bang! Todos los protones, neutrones y electrones que forman parte de nuestro cuerpo, de la Tierra, el Sol y el resto de las galaxias se formaron en ese instante. En otras palabras, los que estamos buscando es justamente es el día de nacimiento del universo. Compare el tiempo encontrado de su gráfico con otros tiempos que den información sobre el origen del universo. ¿Es el dato

encontrado por usted consistente con lo que se sabe acerca de cuándo ocurrió el Big Bang?

Anexo A. Trayectoria de un rayo de luz en la atmósfera.

En este anexo buscamos dar una justificación heurística a la deflexión de la luz en la atmósfera, suponiendo una Tierra plana. Imaginemos para ello que la atmósfera está estatificada en capas de índices de refracción $n(z)$ decreciente, como se indica esquemáticamente en la Fig. xx.13.

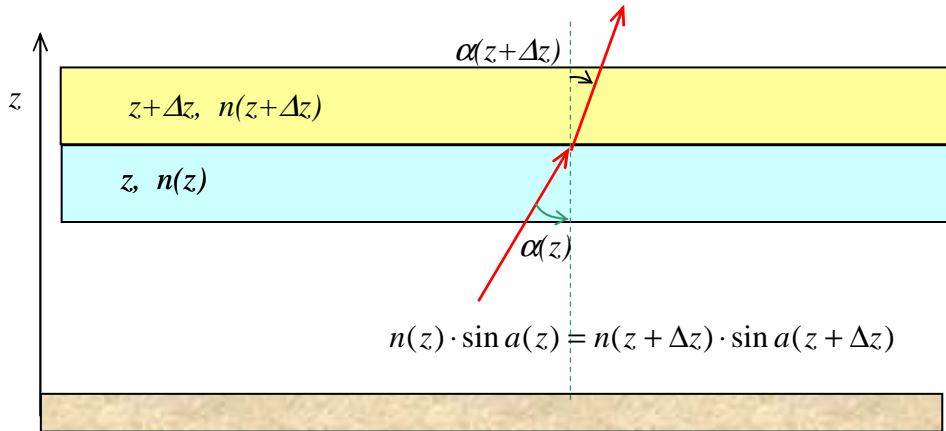


Figura xx.13. Trayectoria esquemática de los rayos de luz al pasar de un medio ópticamente más denso a otro menos denso.

Por la ley de Snell tenemos:

$$n(z) \cdot \sin \theta(z) = n(z + \Delta z) \cdot \sin \theta(z + \Delta z), \quad (\text{xx.23})$$

y en general:

$$n(z_1) \cdot \sin \alpha(z_1) = n(z_2) \cdot \sin \alpha(z_2), \quad (\text{xx.24})$$

donde z_1 y z_2 son dos alturas distintas. En particular, si $z_1 = z_i (=h)$ y $z_2 = z_f (z_f=0$ a nivel del mar). Según (xx.23) tenemos:

$$\sin \alpha_f = \frac{n(z_i)}{n(z_f)} \cdot \sin \alpha_i = \left[\frac{1 + D \cdot \exp(-z_i / h_{00})}{1 + D \cdot \exp(-z_f / h_{00})} \right] \cdot \sin \alpha_i. \quad (\text{xx.25})$$

Esta expresión contiene los factores relevantes de la expresión (xx.8) y justifican la curvatura de los rayos de luz que parten con un ángulo respecto a la vertical, $\alpha_i \neq 0$. En la Figura xx.14 se representan estimaciones de los ángulos θ_i y δ esperados usando (xx.8) y (xx.5), respectivamente.

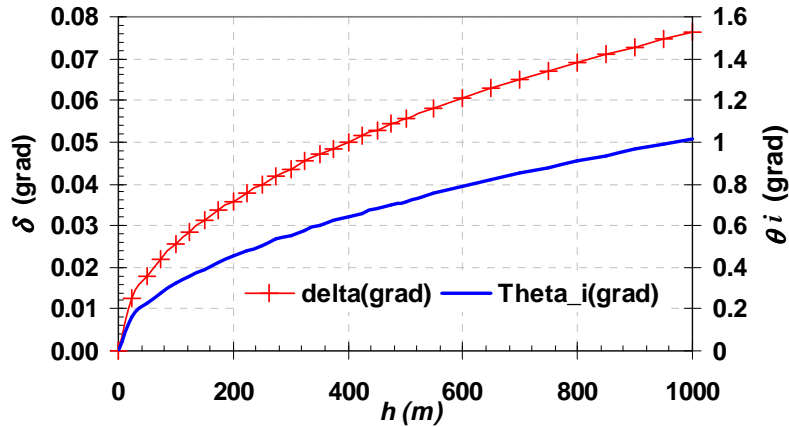


Figura xx.14. Ángulo de corrección, $\delta = \theta_j - \theta_i$, por efecto de curvatura de los rayos de luz, Ec.xx.8, cruces referido al eje vertical izquierdo y ángulo θ_i como función de la altura h , referido al eje vertical derecho.

Anexo B. Períodos de la Luna. El *período sideral* de la Luna (T_{sid}) es el tiempo que la Luna tarda en recorrer 360° respecto de las estrellas lejanas. Este período es de 27.3216 días; ver la Figura xx.15. Por su parte el *período sinódico* ($T_{Luna} = 29.53$ días) es el tiempo que tarda la Luna en volver a aparecer en el mismo punto del cielo relativo al Sol. De la Figura xx.15, vemos que:

$$T_{Luna} = T_{Sid} + \frac{\theta}{360^\circ} T_{Luna} \quad (xx.29)$$

O sea,

$$T_{Luna} = T_{Sid} \left/ \left(1 - \frac{T_{Sid}}{T_{Tierra}} \right) \right. \quad (xx.30)$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{T_{Sid}} = \frac{1}{T_{Luna}} + \frac{1}{T_{Tierra}}, \quad (xx.31)$$

donde T_{Tierra} = Período sideral de la Tierra alrededor del Sol (365 d).

En general se puede probar, usando un argumento similar al formulado que la relación entre el período sideral (T_{Sid}) de un planeta dado y su período sinodal (T_{Sin}) viene dado por:

$$\frac{1}{T_{Sid}} = \frac{1}{T_{Sin}} - \frac{1}{T_{Tierra}}, \quad (xx.32)$$

si $T_{Sid} < T_{Tierra}$, o sea si el planeta es interior a la órbita terrestre y

$$\frac{1}{T_{Sid}} = \frac{1}{T_{Sin}} + \frac{1}{T_{Tierra}}, \quad (xx.33)$$

si $T_{Sid} > T_{Tierra}$, o sea si el planeta es exterior a la órbita terrestre.

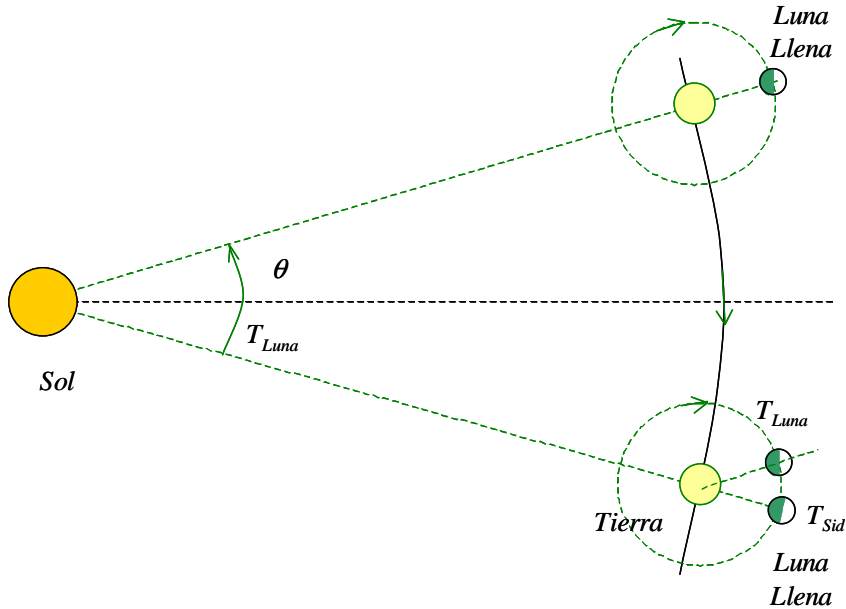


Figura xx.15. Esquema que muestra las posiciones respectivas del Sol, la Tierra y el Sol.

Índice Alfabético

Marcadores	Nombre Marcador
Aristarco de Samos	Aristarco
Erastóstenes	Erastostenes
Hiparco de Nicea	Hiparco

Referencias

- ¹ NASA Eclipse Home Page. Página de la NASA dedicada a los eclipses lunares <http://eclipse.gsfc.nasa.gov/lunar.html>
- ² S. Gil, H. D. Reisin y E. E. Rodríguez, “Using a digital camera as a measuring device,” - Am. J. Phys. **74**(9), 768-775 (2006)
- ³ P. Núñez , S. E. Calderón y S. Gil, ”Midiendo el sistema solar en el aula,” Lat. Am. J. Phys. Educ. **3** (2),229-238 (2009).
- ⁴ Astronomy Education at the University of Nebraska- Lincoln. <http://astro.unl.edu/naap/ssm/modeling2.html>
- ⁵ The Solar System Exploration – NASA <http://solarsystem.nasa.gov/index.cfm>.
- ⁶ Proyecto Erastóstenes, Departamento de Física, UBA, Buenos Aires, Argentina, <http://eratostenes.df.uba.ar/>, Teacher’s Guide to Erastóstenes Project, activity is part of the World Year of Physics 2005, the centennial celebration of Einstein’s “miracle year.” In 1905, <http://www.physics2005.org/projects/eratostenes/TeachersGuide.pdf>
- ⁷ D. Gangadharan, “Measuring the Radius of the Earth from a Mountain Top Overlooking the Ocean,” Phys. Teach. **47**(8) 533-535 (2009).
- ⁸ D.C. Giancoli , Física - Principios con Aplicaciones. Prentice Hall México 1997.

-
- ⁹ J. D. Wilson, Física - 2nda Ed Prentice Hall México 1996
- ¹⁰ Derman, S., Aristarchus at your service, Phys. Teach. **38**, 574 (2000) , Derman, S., Correction: "Aristarchus at your service", Phys. Teach. **39**(3), 113 (2001)]
- ¹¹ The Solar System Exploration – NASA <http://solarsystem.nasa.gov/index.cfm>
- ¹² Existen numerosos programas que permiten simular un planetario en la computadora. Tanto comerciales (<http://www.skymaps.com/store/index.html>) como gratuitos (<http://www.winstars.net/english/index.html>: Winstar aplicación, por Frank Richard, Franky Company, versión 1.0.0.31.)
- ¹³ Sur Astronómico, <http://www.surastronomico.com>
- ¹⁴ Torres Arzayús, S., Exploremos el Universo, <http://astroverada.com/entrada.html>
- ¹⁵ Fiorenza, N. A., *The Lunar Planner, Venus Elongations & the Crescent Moon*, <http://www.lunarplanner.com/HCpages/Venus-Moon.html>
- ¹⁶ Astronomía Dao <http://personal.telefonica.terra.es/web/xgarciaf/heliocen/mecurio.htm>
- ¹⁷ Hay varios sitios en Internet donde pueden obtenerse las efemérides de los planetas, una de ellas es: www.elcielodelmes.com © Vicente Díaz 2007, <http://www.elcielodelmes.com/Efemerides/conjunciones-y-oposiciones-planetas-externos.php#1>
- ¹⁸ Almanako de Rick Wiegmann Koshko, provee fechas de conjunciones, oposiciones y cuadratura de los planetas. http://almanako.com/oppositions_quadratures.shtml.