Capítulo 3

Introducción al análisis gráfico – Actividades

Objetivos

- ✓ Descubrimiento de leyes empíricas
- ✓ Análisis gráfico
- ✓ Estudiar leyes de escala
- ✓ Leyes alométricas
- ✓ Importancia del tamaño en Biología
- ✓ Leyes de conservación
- ✓ Leyes alométricas en sistemas fractales
- ✓ Ley de Kleiber
- ✓ Ley de Benford
- ✓ Ley de Zipf

El mundo se caracteriza por una gran variabilidad y diversidad, tanto en su faz natural como cultural. Los científicos tratan de encontrar regularidades y orden en este aparente "caos" en que vivimos. En los siguientes proyectos nos proponemos emplear algunas técnicas de análisis gráfico que nos ayudarán a encontrar regularidades y, a partir de las mismas, inferir "leyes empíricas" que nos permitan describir y sistematizar observaciones. Desde luego, esta es sólo una de las múltiples herramientas de las que disponen los científicos para descubrir leyes. En particular, nos proponemos encontrar leyes empíricas de escalas a partir del análisis de datos provenientes de diferentes fuentes. Realizaremos aplicaciones a los campos de la Física, la Astronomía, la Biología, la Lingüística y la Matemática.[1, 2,3]

Leyes de escala

Las leyes de escalas son importantes en muchas ramas de las ciencias. En particular en la Biología son frecuentes las llamadas *leyes alométricas*, que describen relaciones entre características anatómicas, fisiológicas o de comportamientos y tamaños o formas. Estas relaciones, en general, se describen matemáticamente por expresiones potenciales:

$$y = A_0 x^b \,, \tag{3.1}$$

donde x es una variable independiente, y la variable dependiente, y A_0 y b son dos parámetros característicos del sistema en estudio. Un ejemplo de este tipo de relación es la que hay entre el ritmo respiratorio y el tamaño de animales vertebrados. En este caso la variable y representa el ritmo o frecuencia respiratoria y x puede ser la masa o longitud del animal.[3,4] Otros ejemplos de leyes potenciales de la forma (3.1) en la Física son la relación entre el período de un péndulo simple, T, y su longitud L:

$$T = \left(2\pi/\sqrt{g}\right)\cdot L^{1/2} = A_0 \cdot L^{0.5} , \tag{3.2}$$

o la relación entre el período T de los planetas y su distancia media al Sol, d, conocida como tercera ley de Kepler:

$$T = k \cdot d^{3/2} \,. \tag{3.3}$$

Estas leyes de escalas se presentan también en muchos otros sistemas simples. Por ejemplo, en un cubo su área A es proporcional a su lado L al cuadrado, es decir:

$$A = 6L^2 \Rightarrow A \propto L^2 , \tag{3.4}$$

y su volumen V:

$$V = L^3 . \tag{3.5}$$

En estos casos las variables dependientes A *y* V varían con distintas potencias de L.

Cómo vimos en el Cap. 2, la Ec. (3.1) se "linealiza" cuando se grafica *log y* en función de *log x*:

$$\log y = \log A_0 + b \cdot \log x , \tag{3.6}$$

o también cuando elegimos una escala *log-log* para representar y como función de x.

Recíprocamente, si un conjunto de datos experimentales (x_i, y_i) se alinean al representarlos en escala log-log, podemos inferir que la relación que liga x con y es del tipo potencial.

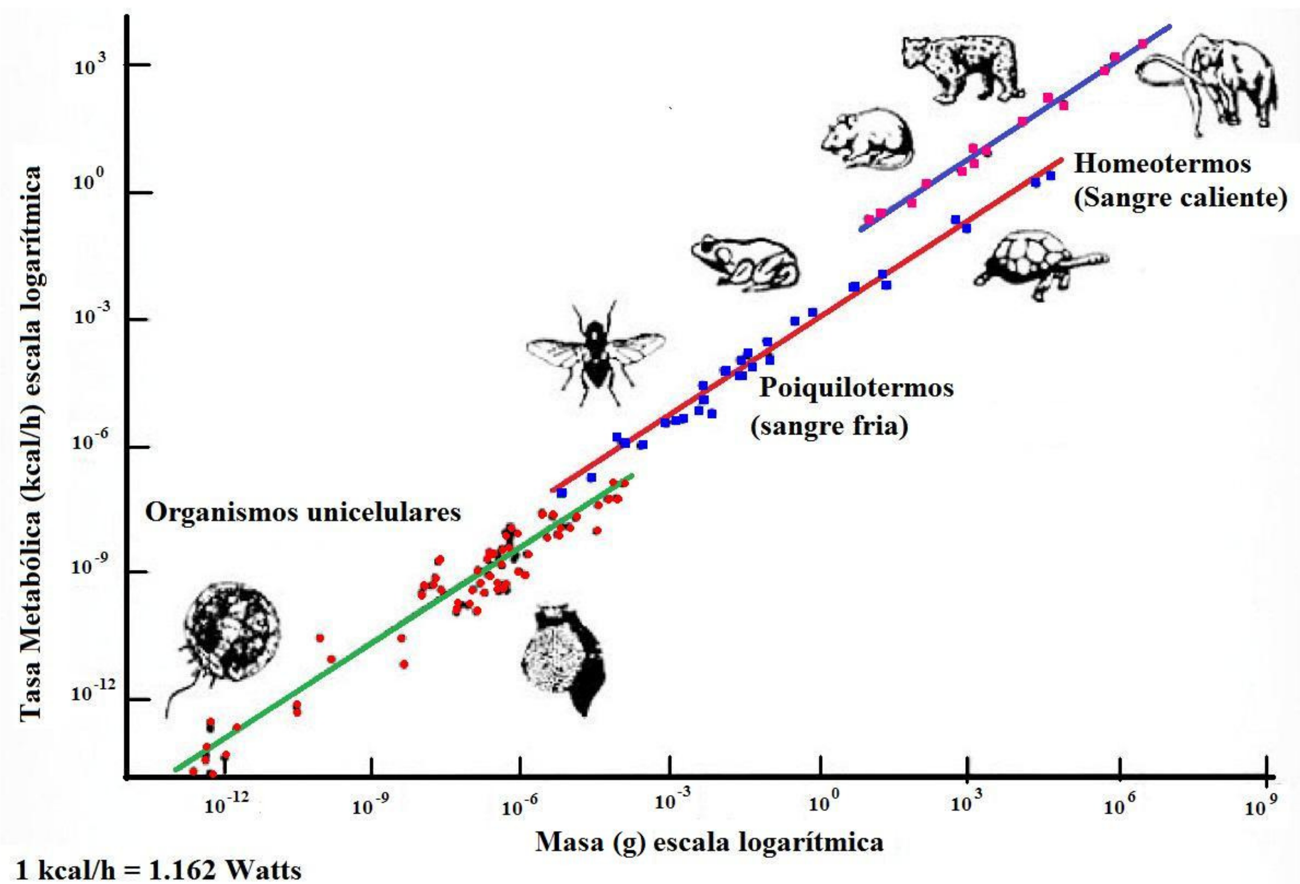


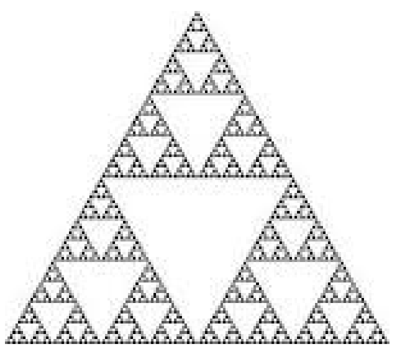
Fig. 3.1. Ley de Kleiber, tasa metabólica en función de la masa para diversos organismos en escala log-log. Nótese que esta relación cubre 22 órdenes de magnitud en masa! Figura extraída de la Ref.(3).

Es interesante señalar, que aunque los sistemas biológicos son de los sistemas más complejos de la naturaleza, muchas de sus propiedades fundamentales pueden expresarse por medio de leyes alométricas, extremadamente simples, en función del tamaño o la masa. Ejemplo de este tipo de relaciones es la correspondencia entre la tasa metabólica basal (BMR) de un animal y su masa, M. La BMR es el mínimo consumo de energía por unidad de tiempo o potencia mínima para que un animal se mantenga vivo. Esta relación se conoce como ley de Kleiber,[4,5] ver Fig. 3.1, y se expresa como:

$$BMR = A_0 \cdot M^{3/4} . \tag{3.7}$$

Esta ley se cumple para una gran variedad de especies, cubriendo un rango de variación de masa de más de 22 órdenes de magnitud! Este patrón o sistemática abarca desde bacterias hasta ballenas azules. Otros ejemplos de este tipo de relaciones son la correlación entre el ritmo respiratorio y la masa, o entre la longevidad de un animal y su masa. Las leyes de escalas desafían y a la vez guían a los investigadores en la búsqueda de modelos que intenten describirlas. De hecho estas sorprendentes relaciones y sus implicancias han recibido considerable atención y se han convertido en una de las fronteras de investigación más activas de los últimos años.[4,5]

Otra observación, simple de realizar, permite relacionar la altura de los árboles con el diámetro de sus troncos. Estos principios biomecánicos han sido estudiados en muchos sistemas y tienen mucha utilidad para comprender la arquitectura de las plantas. También se encontraron relaciones potenciales como la Ec. (3.1) en diversas áreas de la tecnología, las matemáticas y el lenguaje. Un ejemplo es la relación entre la velocidad de crucero y las dimensiones de las alas de casi todos los animales y máquinas que vuelan.[5]



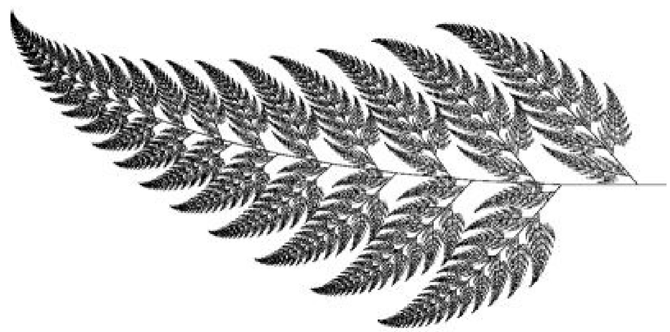


Fig. 3.2 Ejemplo de figuras fractales. A la derecha tenemos un triangulo de Sierpinski. A la derecha un helecho. Obsérvese como cada parte de estas figuras, es una replica del todo.

Otros sistemas donde pueden estudiarse relaciones similares son los sistemas fractales (Fig. 3.2). Estas formas son muy prevalentes en la naturaleza y se caracterizan por la semejanza entre una pequeña parte del sistema y el todo, es decir que presenta auto-semejanza para todas las escalas.[6] Este tipo de estructura se puede observar en un árbol, un helecho, el sistema circulatorio o renal, en frutos y plantas como el brócoli y coliflor, etc. La investigación de sistemas biológicos que presentan este tipo de estructura, como veremos, revela relaciones alométricas muy particulares que son características de estos sistemas.[1,3,12]

En muchos conjuntos de datos estadísticos, como el número de personas que habitan pequeños pueblos y ciudades del mundo, la ocurrencia del primer dígito en estos datos no se presenta al azar sino que sigue una relación bien definida. Más específicamente, si seleccionamos el primer dígito de este conjunto de datos de una población, se observa que el dígito 1 aparece con mayor probabilidad que el 2, etc., siguiendo una relación bien definida, descripta por la ley de Benford.[7] Asimismo, en

Lingüística, se encuentra que en un dado texto, en casi todos los idiomas, hay palabras que se repiten. Si se ordenan las palabras que más veces se repiten y a su ubicación en este ranking de repetición lo designamos n, se encuentra que las veces que aparece una dada palabra, o sea su frecuencia de ocurrencia f, es inversamente proporcional a n, o sea $f \propto n^{-1}$. Esta relación se conoce como Ley de Zifp,[8] y es muy simple de observar y analizar.

Las actividades que a continuación presentamos, permiten encontrar relaciones simples en diversos sistemas naturales y culturales, los cuáles son abordados usando técnicas de análisis gráfico.[1] Para este fin utilizamos las ventajas que nos brindan las hojas de cálculo y las técnicas desarrolladas en el Cap. 2.

Análisis de resultados experimentales

Proyecto I. 3.- Relación masa – longitud de hojas de una planta.

En esta actividad deseamos explorar la relación entre el tamaño de hojas de una misma planta, representado por su longitud, y su masa. Para este primer ejercicio, en la Tabla 3.I se facilitan los valores observados de un conjunto de hojas de una variedad de planta: Adelfa o Nerium.[1] El objetivo es descubrir la ley subyacente a este conjunto de datos, si es que tal ley existe.

Propuesta de trabajo:

- ✓ Represente gráficamente el ancho de la hoja como función de la longitud, usando los datos de la Tabla 3.1. ¿Es posible describir el ancho en función del largo a través de una relación lineal? Si suponemos que las hojas de una misma planta son semejantes entre sí, esperaríamos una proporcionalidad entre el ancho y largo, por semejanza. O sea $a=\kappa L$. ¿Los datos de la tabla 3.1 convalidan esta expectativa?
- ✓ Represente gráficamente la masa de las hojas en función de su longitud. Realizando cambios de escalas adecuados, trate de linealizar la representación gráfica de estas variables. Es decir, cambiando la escala de los ejes de lineal a logarítmica, etc., trate de lograr que en alguna representación gráfica los datos aparezcan alineados. ¿Es posible describir la masa de la hoja en función del largo a través de una relación potencial?
- ✓ La mayoría de las hojas de cálculo como Excel ® Microsoft, etc. Disponen de herramientas de ajuste de curvas, es decir tienen la capacidad de estimar los parámetros de las funciones que mejor ajustan un conjunto de datos. En general utilizan la técnica de cuadrados mínimos que estudiaremos más adelante. Utilizando estas herramientas, ajuste la curva que mejor describa esta dependencia entre la masa y la longitud de las hojas.

Variedad laurel rosa		
Long (cm)	Ancho(mm)	M(g) (Verde)
8.5	11.0	0.278
8.5	11.0	0.283
9.4	13.0	0.395
10.0	14.0	0.435
10.4	15.0	0.454
11.6	16.0	0.602
12.1	17.0	0.656
12.3	17.0	0.671
14.0	18.5	0.718
14.4	23.0	1.033
16.0	26.0	1.478
16.5	24.0	1.263
17.3	26.0	1.308
20.5	31.0	2.045
20.3	30.0	1.946
22.2	36.0	2.424
25.0	41.0	3.246

Tabla 3.1 – Relación entre la masa, ancho y longitud de distintas hojas de un laurel rosa o adelfa.

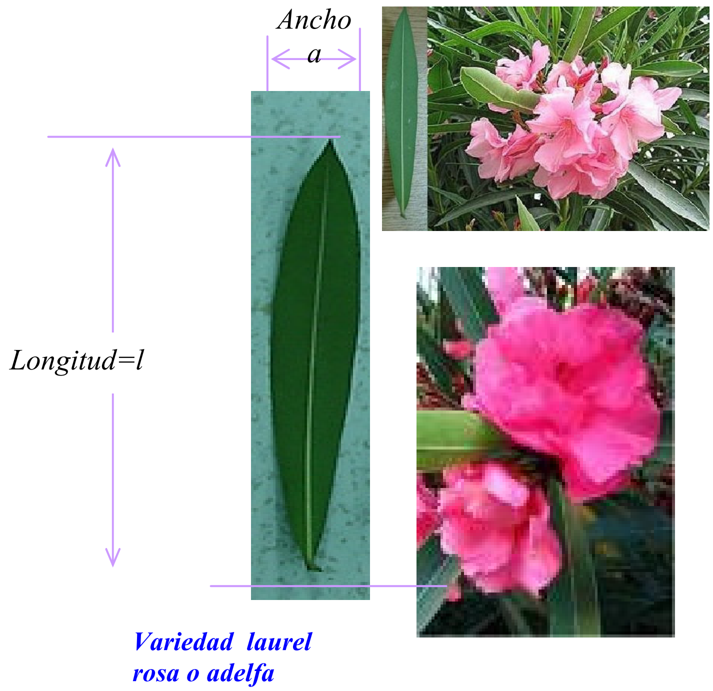


Fig. 3.2. Hoja de laurel rosa o adelfa.

✓ Intente justificar teóricamente los resultados encontrados. Para ello suponga que las hojas tienen espesor medio δ y una densidad ρ, que suponemos constante. Si A representa el área de la hoja; su masa m será proporcional a $\rho\, A\, \delta$. Si se cumple que el ancho a es proporcional a la longitud, o sea: $a = \kappa . l$ y $A = \kappa . l^2$ y podemos escribir: $m = k . l^2 . \delta$, siendo k ($= \kappa . \rho$) una constante de proporcionalidad. Por lo tanto si graficamos la pseudovariable (m/l^2) como función de l, podemos descubrir si δ depende o no con l. En particular analice si se puede aproximar la dependencia del espesor δ con l como una función potencial de la forma $\delta = A_0 . l^{\beta}$. Aquí A_0 es otra constante de proporcionalidad. Usando los datos de la tabla 3.1, ponga a prueba estas hipótesis y de ser posible determine el parámetro β. A partir del análisis realizado trate de responder las siguientes preguntas:

- ¿Varía este espesor δ con el tamaño o es más bien constante?
- ¿Crece o decrece el espesor de la hoja con su tamaño, representado por l? ¿Cómo llega a esta conclusión? (Sugerencia: Si el espesor de la hoja fuese estrictamente constante, la masa de las hojas dependería del tamaño l (longitud) como $m = k\, l^2$. Si el volumen como un todo aumentase proporcionalmente con l, la relación esperada sería $m = k\, l^3$. Si el espesor disminuyese con el tamaño, $m = k\, l^{\varepsilon}$, con $\varepsilon < 2$).
- Si la dependencia encontrada fuese $m = k\, l^{2+\beta}$, con $0 < \beta < 1$, esto implicaría que la hoja tiende a maximizar su superficie compatible con su resistencia mecánica Discuta este argumento a la luz de los resultados encontrados.

✓ Galileo Galilei hizo una interesante observación. Supongamos que tenemos un tablón de madera, que está apoyado sobre una mesa en voladizo (la mayor parte del tablón sobresale de la mesa como un balcón). Supongamos que dicho tablón sostiene perfectamente su peso. Si con la misma madera e igual ancho y espesor construimos tablones cada vez más largos, llegará un momento en que el tablón no soportará más su peso y se partirá. Esta observación aplicada a los árboles nos sugiere que los árboles, al crecer en altura, también deben hacerlo en diámetro, para que el mismo pueda soportar su peso. Esta misma idea aplicada a las hojas nos sugiere que al aumentar de tamaño, éstas deben aumentar en espesor para mantener su rigidez. ¿Sus datos están de acuerdo con esta aseveración o hipótesis o la contradicen?

La fotosíntesis es el proceso mediante el cual las plantas captan y utilizan la energía del Sol (luz) para transformar la materia inorgánica de su medio externo (nutrientes) en materia orgánica que emplean para su crecimiento y desarrollo. Desde este punto de vista podría suponerse que a las plantas las favorece tener hojas lo más grande posible, es decir de mayor área, para optimizar o maximizar el proceso de fotosíntesis. Una forma de lograrlo con el menor costo de materia sería que la masa de las hojas varíe con su longitud a una potencia menor que 2. Pero si el exponente fuese menor que 2, esto implicaría que el espesor de las hojas disminuiría con el tamaño. Si el exponente fuese igual a 2, implicaría que el espesor de las hojas fuese constante. Sin embargo, si las hojas grandes tuviesen el mismo espesor que las pequeñas, su resistencia mecánica para soportar su peso, y el de las gotas de agua que siempre se adhieren a ella, decrecería con el tamaño. Para que la resistencia mecánica se incremente con el tamaño de la hoja se requiere que su espesor aumente conforme crece. Por lo tanto, se esperaría que la masa varíe con el tamaño con un exponente mayor que 2 pero menor que 3. ¿Sus datos están de acuerdo con este argumento?

Proyecto I. 4.- - Experimentos con plantas reales

a) Relación entre el tamaño de una hoja y su masa

Equipamiento recomendado: Una balanza de rango de unos 100g (o mayor) y sensibilidad de 0.1g o mejor. Una regla graduada en mm de largo mayor a la más grande de las hojas usadas.

Seleccione una especie de hoja que desee investigar. Para ello elija una planta a la que tenga acceso y de la cual puedan obtener hojas de diversos tamaños. Recoja hojas de distintos tamaños del mismo árbol o planta, desde la más pequeña a la más grande que pueda encontrar. Asegúrese que todas las hojas provengan de la misma planta y que hayan sido cortadas al mismo tiempo. Evite tener hojas que fueron cortadas en días muy separados el uno del otro, ya que las hojas viejas pierden masa por evaporación del agua contenida en ellas. Para este experimento conviene disponer de una balanza que tenga una sensibilidad de 0.1 g o mejor. Desde luego esto depende de la variedad de planta elegida. Para hojas de plantas comunes, la masa de las hojas está en el orden de fracciones de gramo, por lo tanto para observar variaciones significativas es necesario que la apreciación de la balanza sea suficientemente menor que las variaciones de masa entre hojas de distintos tamaños.

Propuesta de trabajo:

- ✓ Represente gráficamente la variación de la masa en función de la longitud. Realizando cambios de escalas adecuados, trate de linealizar la representación gráfica de estas variables.
- ✓ Ajuste la curva que mejor describa esta dependencia entre las variables.

- ✓ A partir de la dependencia encontrada de la masa en función de la longitud, analice la variación del espesor de las hojas con la longitud. ¿Varía este espesor con el tamaño o es más bien constante?
- ✓ Sus datos ¿son consistentes con la afirmación: "Las hojas tienden a maximizar su superficie compatible con su resistencia mecánica"?

b) Relación entre el tamaño de una fruta y su masa

Equipamiento recomendado: Una balanza de rango de 1 kg (o mayor) y sensibilidad de 1g. Una regla graduada en mm de largo mayor a la fruta más grande.

Seleccione una fruta de la que puede conseguir ejemplares de distintos tamaños, en lo posible que pertenezcan a una misma variedad. Una posibilidad sería conseguir un cacho de bananas de las que se pueden conseguir ejemplares pequeños y grandes. También las zanahorias, zapallos, etc. se pueden encontrar en un rango amplio de tamaños. Cualquier fruta o nuez de las que pueda conseguir individuos de distintos tamaños pueden servir para esta actividad. Otra posibilidad sería usar una planta de brócoli o coliflor, que al ser fraccionados generan ejemplares de distintos tamaños pero que mantienen semejanza geométrica entre si. Ver figura 3.4.

Tome como referencia una de sus dimensiones, preferentemente la mayor de ellas para hacer más simple la medición y tener mayor variación y sensibilidad en la caracterización del tamaño. Mida esta magnitud a la cual llamaremos L y la masa m de cada muestra.

Propuesta de trabajo:

- ✓ Represente gráficamente la variación de m como función de L. Mediante cambios adecuados de las escalas, trate de linealizar la representación gráfica de estas variables.
- ✓ Ajuste la curva que mejor describa esta dependencia entre las variables.
- ✓ Si es posible ajustar sus datos por una ley alométrica de la forma $m = A_0 L^b$, determine los mejores valores de los parámetros A_0 y b y estime sus correspondientes errores. ¿Esta vez b está más cerca de 2 o de 3?

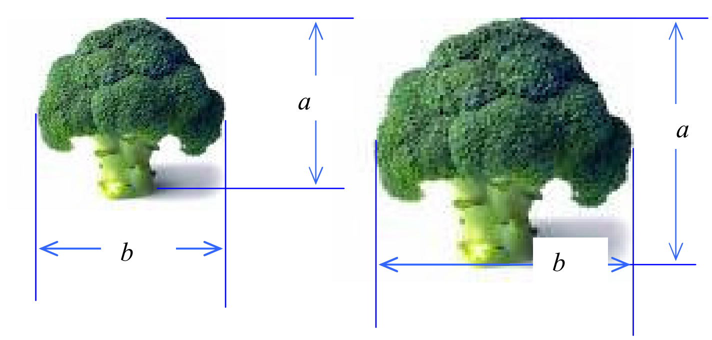


Figura 3.4 Plantas de brócoli geométricamente semejantes, es decir que la relación a/b es aproximadamente la misma para todas las muestras.

b) Relación entre el tamaño de una especie de mamífero y su longitud

Equipamiento recomendado: Una balanza de rango de 1 kg (o mayor) y sensibilidad de 1g. Una regla graduada en mm de largo mayor que el animal más grande.

Seleccione una especie de mamífero a estudiar de los que puede conseguir ejemplares de distintos tamaños. Una posibilidad sería tomar una muestra de humanos. Para ellos, si trabaja en grupo, trate de obtener la altura h y la masa m de distintos miembros de su familia y amigos. Construya una tabla lo más extensa posible de masas, alturas, edades, sexo y contextura (divida esta categoría en tres: delgado, medio y robusto). Procure que en el grupo se incluyan niños pequeños y adultos. Combine sus datos con los obtenidos por sus compañeros. Analice cada contextura de individuos por separado. Otra posibilidad, si tiene acceso a un bioterio, sería utilizar ratas de una misma especie, con una variedad de tamaños, desde las más pequeñas a los ejemplares más grandes. En este caso, h representaría el largo del animal tomado desde el nacimiento del rabo o cola hasta la punta de su nariz u hocico. Para simplificar, en este caso no es necesario diferenciar sexo y contextura.

Propuesta de trabajo:

- ✓ Represente gráficamente la variación de m como función de h, para un dado sexo y tipo de contextura, si utiliza datos de personas. En otro gráfico incluya todos los individuos, independientemente de su sexo y contextura. En el caso de animales, no es necesario diferenciar sexo y contextura. Evalúe la posibilidad de linealizar las representaciones gráficas mediante cambios de escalas adecuados.
- ✓ Ajuste la curva que mejor describa la dependencia entre las variables en cada caso.
- ✓ Si es posible ajustar sus datos por una ley alométrica de la forma $m = A_0\, L^b$, determine los mejores valores de los parámetros A_0 y b y estime sus correspondientes errores.
- ✓ Si la dependencia encontrada fuese $m = k\, l^{3+\beta}$, con $\beta \approx 0$, esto implicaría que la especie en estudio tiene un crecimiento tridimensional, es decir tanto su ancho como espesor son proporcionales al largo. Discuta este argumento a la luz de los resultados encontrados.

Proyecto I. 5.- Buscando leyes de conservación en la naturaleza

Equipamiento recomendado: Una cinta métrica graduada en mm de un par de metros.

Cuando observamos un árbol o una arteria (o vena que se ramifica) es notable la similitud de las formas, como se observa en la Fig.3.5. Quizás el rasgo común más notable de estos sistemas es su estructura fractal, es decir el hecho que una parte de los mismos tiene las mismas características que el todo. En particular se observa que al bifurcarse una rama de un árbol o una arteria, las ramas que emergen son siempre más delgadas que el tronco de donde se originan.

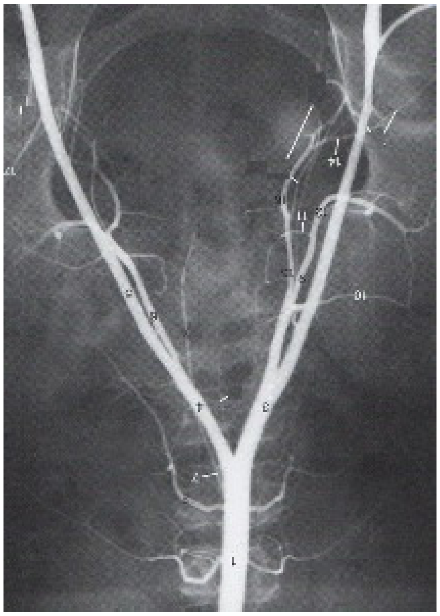


Figura 3.5 Angiografía de una arteria (izquierda) y fotografía de un árbol (derecha). Entre estas imágenes existe una notable similitud, en particular en las ramificaciones.

Uno estaría tentado a conjeturar que quizás el diámetro d (o perímetro p) del tronco original está relacionado con los diámetros de las ramas nacientes, siguiendo alguna relación de la forma:

$$d_{Tronco} = \sum_i d_{rama\_i} \qquad \text{o tal vez} \qquad d^n_{Tronco} = \sum_i d^n_{rama\_i}\,, \tag{3.8}$$

donde n es un exponente a determinar. Para una rama o tronco de sección cuasi-circular, el perímetro es aproximadamente proporcional al diámetro medio de la rama o tronco. Por lo tanto, expresiones similares a (3.8) valdrían también para el perímetro p. Según qué parámetro sea más fácil de medir, puede emplearse uno u otro. En el caso de un árbol, debido a las irregularidades en la forma, se sugiere medir el perímetro que brinda una mejor estimación del diámetro medio. El objetivo de esta actividad es investigar si una “ley de conservación” del tipo (3.8) vale para una dada especie arbórea. En primera instancia, parecería razonable una relación con exponente n = 2. Si los nutrientes del árbol (savia) fluyen por el tronco, podría esperarse que el área de la sección transversal se conserve. De esa manera todas las partes estarían igualmente nutridas. Si las áreas aumentaran o disminuyesen, a las ramas podría faltarles o sobrarles nutrientes. En árboles de tronco sin ramificación y de gran longitud (por ejemplo, una palmera) se observa una disminución continua del diámetro, que podría conjeturarse tal vez, como consecuencia del consumo de nutrientes por el mismo tronco que hace que llegue menos nutrientes a medida que un segmento del tronco está más alejado del suelo. También la gravedad dificultaría la ascensión de los nutrientes a gran altura. Sin embargo, a corta distancia, podría suponerse que el área del tronco y las ramas fuese la misma. Es decir, el área se conserva, siempre y cuando se consideren las secciones justo antes y después de una ramificación. Desde luego, hay árboles de geometrías muy diversas, que reflejan la complejidad de los sistemas biológicos. Sin embargo, para una gran variedad, es posible encontrar una relación del tipo (3.8).

El objetivo de esta actividad es poner a prueba estas hipótesis (conservación del área) para una dada especie. La idea es entonces medir en un dado árbol o grupo de árboles de la misma especie, los perímetros (o diámetros) de una rama principal y el perímetro de todas la ramas nacientes, inmediatamente después de la ramificación. Para ello es conveniente que para cada árbol usado se midan troncos grandes y pequeños. También se deben evitar ramificaciones en la que se realizaron podas, ya que esto puede distorsionar el efecto que intentamos identificar.

Propuesta de trabajo:

- ✓ Combinando todos los datos disponibles, construir un gráfico de $\sum_i d^n_{ramas\_i}$ como función de d^n_{Tronco}, dejando el exponente n como parámetro variable. Luego, variando n, encontrar el valor para el cual los datos estén alineados con la menor dispersión (o sea para el que R^2 sea lo más próximo a 1).
- ✓ ¿Qué puede concluir de sus gráficos y observaciones en general respecto a la validez o no de las relaciones (3.8)?
- ✓ ¿Puede enunciar alguna "ley de conservación" en la ramificación de un árbol?
- ✓ ¿Cómo investigaría una ley de conservación similar para una arteria a partir de una angiografía del tipo de la Fig. 3.5?
- ✓ ¿Cómo justificaría la existencia de una ley de conservación en las arterias si las secciones de las arterias se conservaran? Sugerencia: para un liquido incompresible, la conservación de la masa conduce a que el flujo de fluido, o sea el volumen que pasa por unidad de tiempo, debe ser el mismo a lo largo de un tubo y sus derivaciones, en particular, antes y después de una ramificación.

Proyecto I. 6.- Importancia del tamaño en Biología

Galileo hizo varias observaciones interesantes acerca de la relación entre la altura de los árboles y el diámetro del tronco; como de la relación entre el tamaño de los animales y algunas de sus propiedades. En los siglos que siguieron, y en especial a lo largo del siglo 3, se encontraron notables relaciones entre distintas propiedades de muchos animales y su tamaño, que relacionan los comportamientos de especies tan disímiles como las bacterias y ballenas azules, dentro de una misma sistemática.[2,9,10,11,12] En la Tabla 3.2 se indican los tamaños, masas, ritmo cardíaco y vida media de varios mamíferos.

Propuesta de trabajo:

- ✓ A partir de los datos de la Tabla 3.2, grafique la dependencia del ritmo cardíaco y la vida media de estas especies en función de sus masas.
- ✓ Varíe las escalas de los gráficos y trate de linealizar las representaciones gráficas. ¿Que dependencia encuentra para sus datos?
- ✓ Grafique asimismo el producto del ritmo cardíaco por la vida media como función de la masa para estas especies. Verifique si este producto se mantiene aproximadamente constante para todas las especies. De ser así, podríamos establecer una ley de conservación para este producto. Discuta cuál es el significado físico o biológico del producto del ritmo cardíaco por la vida media. ¿Cómo estimaría el número total de latidos de un animal a lo largo de toda su vida?
- ✓ En física, cuando una magnitud no cambia a lo largo de una transformación o proceso, decimos que esta magnitud se conserva. Por ejemplo el momento lineal en un choque, la carga eléctrica, etc. ¿Qué puede decir acerca de posibles leyes de conservación en la biología?

Especie	Masa (kg)	Ritmo Cardíaco (pulsos/min)	Vida media (longevidad en años)
Hamster	0.060	450	3
Conejo	1.00	205	9
Pollo	1.50	275	15
Gato	2.00	150	15
Perro	2.0	100	10
Perro	5.0	90	15
Mono	5	190	15
Perro Grande	8	75	17
Humanos	90	60-80	70
Cerdo	150	70	25
Vaca	800	65	22
Girafa	900	65	20
Caballo	1,200	44	40
Elefante	5,000	30	70

Tabla 3.2. Tamaños, masas, ritmo cardiaco, vida media de varios mamíferos.

Proyecto I. 7.- Frecuencia de aparición de palabras en los idiomas. Ley de Zipf

En la mayoría de los idiomas modernos existen palabras que se repiten en un dado texto. Resulta interesante realizar, para un dado texto, una estadística de estas palabras que se repiten, ordenándolas de acuerdo a su frecuencia de aparición y calculando su probabilidad de aparición. Esta estadística de las palabras que se repiten se llama unigrama (*unigram* en inglés). El objeto de esta actividad es estudiar el histograma de aparición de las palabras o más precisamente la distribución de probabilidades que siguen los unigramas.[7] Para tal fin se propone tomar un texto, con suficientes palabras (más de 3000) e identificar cuantas veces las palabras se repiten. Esto puede hacerse manualmente, pero claramente es más sencillo usar un programa para hacer esta operación. En Internet existen muchos programas que pueden hacer este análisis. Uno de ellos es Hermetic Word Frequency Counter.[1]

Propuesta de trabajo:

- ✓ Usando el procedimiento que crea más conveniente, elija un texto de unas 3000 o más palabras y construya un unigrama de las palabras que más se repitan en el texto seleccionado.
- ✓ En una hoja de cálculo coloque en una dada columna las palabras que más se repiten, y en la celda inmediatamente a su derecha, la *frecuencia de ocurrencia* de cada una de estas palabras. Ordene las filas en orden decreciente de frecuencia de aparición de las palabras. En una columna contigua, coloque un número que indique el *orden* de repetición, de mayor frecuencia a menor.
- ✓ Grafique la frecuencia de ocurrencia en función del orden de aparición. Cambiando las escalas trate de linealizar esta gráfica. ¿Qué relación matemática describe mejor su unigrama?
- ✓ Grafique el producto de la frecuencia de ocurrencia por el orden de aparición en función del orden. Indique si este producto es aproximadamente constante para el texto elegido. De ser así

[1] Hermetic Word Frequency Counter, disponible vía Internet: http://www.hermetic.ch/wfc/wfc.php

podríamos enunciar este resultado estableciendo una ley de conservación: el producto de la frecuencia de ocurrencia de una palabra, por el orden de repetición de la misma es una constante. Discuta la veracidad o no de esta afirmación.

- ✓ La ley de Zipf, por George Kingsley Zipf (1902-1950), profesor de lingüística de la Universidad de Harvard, establece que la frecuencia f de aparición de una palabra en función del orden de repetición r puede expresarse como: $f = k / r$, donde k es una constante. Algunos años más tarde, Mandelbrot (1953) propuso la relación:

$$f = k / (\alpha + r)^{\beta} \tag{3.9}$$

donde α y β son dos constantes adicionales. ¿Cuál de las dos expresiones describe mejor sus datos?

Proyecto I. 8.- ¿Por qué la primera página de una tabla o manual de las bibliotecas es en general la más ajada? Ley de Benford

Existe una interesante y poco intuitiva propiedad que ocurre con muchas series de números. El primer dígito de estas series tiene mayor probabilidad de ser un 1. Luego, en orden de probabilidad le siguen el 2, 3, ...,9. Más propiamente, esta distribución de probabilidad se puede expresar como:[13]

$$P(i) = \log_{10}(1 + 1/i)\,, \tag{3.10}$$

donde i representa el valor del primer dígito (1,2,3,..9) y $P(i)$ es su probabilidad de ocurrencia. Esta ley se conoce como la ley de Benford, quien la descubrió en 1938. Sin embargo, el origen de este descubrimiento data de 1881, cuando Simon Newcomb notó que en muchas bibliotecas las tablas de logaritmos tenían la primera página de la tabla mucho más gastada por el uso que las otras. Esto no es común, ya que a una tabla de este tipo uno lo usa como una guía para buscar un número y no es intuitivo que una página esté más gastada que las otras. Ingenuamente uno esperaría que la probabilidad del primer dígito del número que se busca se produzca completamente al azar.[14],[15]

Esta propiedad es bien distinta de otra categoría de números, los llamados normales. Ejemplo de este tipo de numero son π y e. Estos números tienen la propiedad que todos sus dígitos aparecen con igual probabilidad, es decir presentan una distribución uniforme. Nótese que mientras la ley de Benford hace referencia sólo al primer dígito de una serie de números, la *normalidad* está asociada a todos los dígitos que forman un número irracional. La ley de Benford se ha aplicado exitosamente a muchos fenómenos tanto naturales como culturales y sociales: montos de facturas, precios de acciones, número de habitantes de poblaciones del mundo, longitud de los ríos, etc.

Propuesta de trabajo:

Ejercicio I. Ley de Benford en la potencia de un número

- ✓ Usando una planilla de Excel o cualquier otra hoja de cálculo, coloque en la primera columna (A) los números naturales de 1 a 110; a estos números los designamos como n.
- ✓ Defina un número natural de 1 al 10 y colóquelo en una de las casillas superiores de la hoja de cálculo, llamemos kk a este número. En la Fig. 3.6 se ilustra este procedimiento.
- ✓ En la segunda columna (B) elevemos el número kk a la potencia n (=A_n y B_n= kk^n)
- ✓ En la tercera columna (C) transformemos los números de la segunda columna en un texto: txt_n=C_n=TEXTO(B_n,0)
- ✓ En la cuarta columna (D) extraigamos el primer carácter del texto de la tercera columna: =EXTRAE(txt_n,1,1) =EXTRAE(C_n,1,1). La función EXTRAE(C_n,i,m) toma del texto contenido

en la celda C_n, m dígitos a partir del i-esimo comenzando desde la izquierda. O sea que EXTRAE(C_n,1,1) tome el primer dígito del texto contenido en C_n.

- ✓ Ahora con los primeros dígitos de la columna cuarta (*D*), realicemos un histograma de los primeros dígitos de 1 a 9. Para ellos en la sexta columna definamos las clases (rango del histograma) de 1 a 9 como se muestra en la Fig. 3.6. Ver también Cap. 5 para más información sobre histogramas.
- ✓ En la quinta columna (E), contamos las veces que aparece cada dígito de la clase, es decir los dígitos de 1 al 9.
- ✓ En la sexta columna (F), contemos las veces que cada digito de 1 a 9 se presenta en la cuarta columna D. CONTAR.SI($D$7:$D$118, E7), la función CONTAR.SI(*rango*, F7) cuenta cuantas veces en el *rango* hay coincidencia con el dato de la celda E7, aquí *rango* =$E$6:$E$118.
- ✓ En la siguiente columna (G) normalicemos estas frecuencias de ocurrencias, dividiendo el resultado de la séptima columna (F) por el número de todos los dígitos presentes en la columna D. De este modo, la suma de los datos de la columna G debería sumar 1.
- ✓ En la columna H se calculan las probabilidades predichas por la Ley de Benford, Ec.(3.10)
- ✓ En un mismo grafico, represente gráficamente los valores de las probabilidades empíricas (Columna G) y teórica (columna H) de ocurrencia de cada dígito como función del dígito (columna A).
- ✓ ¿Qué puede concluir de esta comparación?
- ✓ Siguiendo la idea propuesta en esta actividad, analice la probabilidad de aparición del segundo y tercer dígito del número *kk^n*. ¿Qué puede concluir de este caso?

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		113						
2		KK=	4		Benford Law		Benford Law	k^n, con k=4
3		Numero de datos=113				112	1	
4								
5	n	kk^n			Clase	Frecuei	Probability_e	Prob_teor
6	1	4	4	4				
7	2	16	16	1	1	35	0.313	0.301
8	3	64	64	6	2	20	0.179	0.176
9	4	[illegible]	256	2	3	12	0.107	0.125
10	5	1,024	[illegible]	1	4	13	0.116	0.097
11	6	4,096	4096	4	5	8	0.071	0.079
12	7	16,384	[illegible]	1	6	9	0.080	0.067
13	8	65,536	65536	6	7	6	0.054	0.058
14	9	262,144	26[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
15	10	1,048,576	1048576	1	9	4	0.036	0.046

=kk^A7

=TEXTO(B7,0)

=EXTRAE(C7,1,1)

=CONTAR.SI($D$6:$D$118,E7)

=+F7/$F$3

=+LOG(1+1/E7)

Figura 3.6 Un tramo de la hoja de cálculo para estudiar la ley de Benford. Ejemplo de este tipo de hoja de cálculo puede bajarse de www.fisicarecreativa.com. En este ejemplo, los datos a analizar se encuentran en la columna B desde la fila 6 a la 118.

Ejercicio II. Ley de Benford y la sucesión de Fibonacci

La sucesión o serie de Fibonacci se obtiene en forma recurrida a partir de dos números enteros que tomamos como "semillas", y los términos sucesivos se obtienen por la suma de los dos anteriores. Así si a_0 y a_1 son las "semillas," los siguientes términos se obtienen de la relación recursiva:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \,. \tag{3.11}$$

Por ejemplo si como semillas tomamos los números 1 y 2, los siguientes términos son: 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … Si modificamos las "semillas" la serie cambia. Sin embargo hay varias propiedades interesantes que se preservan en esta sucesión. Una de ellas es que el cociente de dos términos sucesivos, rápidamente converge en la relación dorada:[16]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\varphi\equiv\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.6180339\ldots \tag{3.12}$$

La secuencia de Fibonacci, aparece con frecuencia en la naturaleza: pares de conejos que engendra una pareja a lo largo del tiempo, la disposición de las hojas de las plantas, el patrón que se observa en un girasol, las escamas de una piña, etc. Otra propiedad interesante de esta sucesión es que si se toman muchos términos ($n>500$), los primeros dígitos de cualquier sucesión de Fibonacci, siguen la ley de Benford. Precisamente, es esta última propiedad de la sucesión de Fibonacci que nos interesa analizar.

Propuesta de trabajo:

- ✓ Usando una planilla de Excel o cualquier otra hoja de cálculo, coloque en la primera columna (A) los números naturales de 1 a 1000; a estos números los designamos como *n*.
- ✓ En la columna siguiente (B), introduzcamos dos números enteros arbitrarios, en las dos primeras filas, las semillas. Los términos de las siguientes filas se obtienen usando la relación recursiva (3.11).
- ✓ En la tercera columna (C), defina el cociente entre términos sucesivos de la serie, es decir $C_n=B_n/B_{n-1}$. Verifique que variando las semillas, el cociente siempre converge al número φ.
- ✓ En la cuarta columna (D), transforme los términos de la sucesión en texto, D_n=TEXTO(B_n,0), de modo similar al que se utilizó en el ejemplo anterior.
- ✓ En la quinta columna (E), extraiga el primer dígito de cada miembro de la sucesión de Fibonacci, siguiendo la misma técnica que utilizó en el ejemplo anterior.
- ✓ Analice la probabilidad de ocurrencia de los primeros dígitos. Compare sus resultados "experimentales"· con las predicciones de la ley de Benford, Ec.(3.10).
- ✓ ¿Qué puede concluir de esta comparación?

Ejercicio III. Explorando otros conjuntos de números

Muchos otros conjuntos de datos obedecen la ley de Benford. Investigue por ejemplo la población de pueblos y ciudades (incluyendo grandes y pequeñas) de un país de varias decenas de millones de habitantes. También como ejemplo puede tomar la población de todos los países de mundo, incluyendo grandes y pequeños y hacer este estudio.

- ✓ Una base de datos de la población de los países se puede encontrar en Internet (http://www.indexmundi.com).
- ✓ Analice la probabilidad de ocurrencia de los primeros dígitos. Compare sus resultados "experimentales"· con las predicciones de la ley de Benford, Ec.(3.10).
- ✓ ¿Qué puede concluir de esta comparación?

Referencias

(Ver al final)

Índice alfabético

	Nombre del marcador
leyes alométricas	agometría
Ley de Benford	benford
Ley de crecimiento	crecimiento
Geometría fractal	fractal
Relación tamaño-masa	reltammasa
Ley de Zipf	Zipf
Sucesión o serie de Fibonacci	Fibonacci

Referencias

[1] P. Núñez, S. E. Calderón y S. Gil, "Búsqueda de orden y armonía en la naturaleza, descubriendo leyes de escala en el aula," Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. **4**, No. 1, 118- 125, Jan. 2010. http://www.journal.lapen.org.mx
[2] Wiesenfeld K. *Resource Letter: ScL-1: Scaling laws,* Am. J. Phys. **69,** 938-942 (2001).
[3]West G. B., Brown J. H., *Life´ s Universal Scaling Laws.* Physics Today, 36-42 (2004). También: Geoffrey West: The surprising math of cities and corporations, TED conferences 2011- http://www.ted.com/talks/lang/eng/geoffrey_west_the_surprising_math_of_cities_and_corporations.html
[4] McMahon, T., *Size and Shape in Biology*, Science, **179**, 1201-1204 (1973)
[5] Tennkes, H., *The Simple Science of Flight, From Insect to Jumbo Jets*, (MIT Press, Ma. 1997).
[6] Mandelbbrot, B. Los Objetos Fractales, (Tusquets Eds S.A., Barcelona, 2000).
[7] J. R. Bradley and D. L.Farnsworth, "What is Benford's law?", Teaching Statistics. Vol. **31**,(1), 2-5 (2009)
[8] Zipf's law From Wikipedia, the free encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Zipf%27s_law
[9] E.D. Yorke, "Energy cost and animal size", Am. J. Phys. **41**(11), 1286 (1973)
[10] J. T. Bonner, *From bacteria to blue wales, why size matters*, Princeton Univ. Press, Princeton NJ, 2006
[11] B. J. Erquist, G. B. West, E. L. Charnov y J. H. Brown, "Allometric scaling of production and life-history variation in vascular plants," *Nature* **401**, 907 (1999).
[12] G. B. West, J. H. Brown y B. J. Erquist, "A general model for the origin of allometric scaling laws in biology," *Nature* **276**, 122 (1997).
[13] Benford's law, From Wikipedia, the free encyclopedia http://en.wikipedia.org/wiki/Benford's_law
[14] T.P. Hill, The first digital phenomenon, American Scientist, July-August 1998, 86 (4) 358-364
[15] Wolfram MathWorld, Benford's Law, Interactive Demonstrations, http://mathworld.wolfram.com/BenfordsLaw.html
[16] Wolfram MathWorld, Fibonacci Number, http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html