

Análisis de un circuito RC con resistencia no lineal

Joaquín Castro Zini¹, Lucas Provenzano¹ & Emilio F. Restelli¹

(1) Facultad de Ingeniería, Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Favaloro.

joaquin_882@hotmail.com, lucasprovenzano@hotmail.com, emiliofrestelli@gmail.com

RESUMEN: Se estudia la carga de un condensador en serie con una resistencia que no responde a la ley de Ohm (filamento de una lámpara incandescente).

PALABRAS CLAVES: Circuito RC, resistencia no óhmica.

1 INTRODUCCIÓN

Un circuito conformado por un condensador y un resistor conectados en serie se conoce como circuito RC serie. Cuando el circuito se cierra con una fuente de voltaje, el condensador se carga hasta que alcanza un valor máximo, al que llega asintóticamente. Durante el proceso de carga, la corriente en el circuito tiende a cero de la misma manera

Es usual analizar al circuito RC cuando el resistor tiene comportamiento óhmico. En este caso, durante la carga, la diferencia de potencial $v(t)$ en el condensador está dada por:^[1]

$$v(t) = V_0(1 - e^{-t/RC}), \quad (1)$$

donde V_0 es el voltaje de la fuente. La corriente varía en el tiempo desde el valor inicial máximo $I_0 = V_0/R$ hasta cero según:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = I_0 e^{-t/RC}. \quad (2)$$

Después de un tiempo igual a RC , la corriente disminuye a $1/e$ de su valor inicial, y el voltaje alcanza el 63% de su valor final V_0 . El producto RC caracteriza la rapidez de carga del condensador y se conoce como constante de tiempo τ :

$$\tau = RC. \quad (3)$$

Luego de un tiempo, el sistema alcanza un estado estacionario y el voltaje en el condensador alcanza asintóticamente su valor máximo. Este tiempo suele llamarse tiempo de establecimiento del sistema t_e , que en la práctica se estima como

$$t_e = 5\tau. \quad (5)$$

El objetivo de este trabajo es estudiar en forma detallada el proceso de carga de un condensador en un circuito RC serie, en el caso en que el resistor no presenta comportamiento óhmico. Para ello usamos como resistencia del circuito el filamento de una lamparita incandescente, cuya resistencia aumenta a medida que aumenta la intensidad de la corriente.^[2]

La resistencia de un alambre como el filamento de la lamparita, de sección uniforme A y longitud L , está dada por:^[1]

$$R = \frac{\rho L}{A} \quad (6)$$

donde ρ es la resistividad del material. A medida que se incrementa la corriente por la lamparita, la temperatura del filamento aumenta, por lo que aumenta la resistividad dependiente de la temperatura. Además, se da el proceso de expansión térmica, lo que modifica la longitud y área del filamento. Como una consecuencia global del aumento de la temperatura, la resistencia del circuito también aumenta.^[3, 4, 5]

Por la primera ley de Kirchoff, el voltaje en un circuito RC como el estudiado en todo instante es igual a las caídas de potencial en la resistencia y en el condensador:^[1]

$$\varepsilon = iR + \frac{q}{C} \quad (8)$$

donde q es la carga del condensador e i la corriente del circuito. La expresión diferencial respecto del tiempo de la ecuación (8) es:

$$0 = \frac{di}{dt}R + \frac{dR}{dt}i + \frac{1}{C} \frac{dq}{dt}, \quad (9)$$

que tiene en cuenta la variación de R . Teniendo en cuenta que

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad (10)$$

y que en el caso no-ohmico R depende de la corriente:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{di} \frac{di}{dt}, \quad (11)$$

la ecuación (9) se puede reescribir como

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{C} \frac{i}{R + i \frac{dR}{di}}. \quad (12)$$

La ecuación (12) puede ser resuelta numéricamente usando el método de Euler. Si se discretiza la ecuación se obtiene:

$$\frac{i_{n+1} - i_n}{t_{n+1} - t_n} = -\frac{i_n}{C} \frac{1}{R_n + i_n \left. \frac{dR}{di} \right|_n}. \quad (13)$$

Aquí, n hace referencia al n -ésimo paso en el tiempo. Si la corriente i_n en el paso n es conocida, se puede escribir la corriente en el siguiente paso de la siguiente forma:

$$i_{n+1} = i_n - \frac{i_n}{C} \left[\frac{t_{n+1} - t_n}{R_n + i_n \left. \frac{dR}{di} \right|_n} \right]. \quad (14)$$

La ecuación (14) da lugar al modelo numérico que se utiliza en el presente trabajo para el análisis de los datos. A partir del modelo se analiza el comportamiento de la corriente del circuito en estudio.

2 METODO EXPERIMENTAL

Para llevar a cabo el experimento se diseñó un circuito eléctrico RC serie que consta de una fuente de tensión continua variable, una lamparita de linterna y dos condensadores de 1 F conectados en paralelo ($C = 2$ F). Se utilizó además una resistencia patrón de valor ($R_p = 1,8 \Omega$) para medir la corriente del circuito a partir de la medición de la caída de tensión en sus bornes.

El dispositivo experimental se muestra en la Figura 1. Se tiene especial cuidado de no superar

la corriente permitida por la lamparita ($i_{\max} = 0,3$ A).

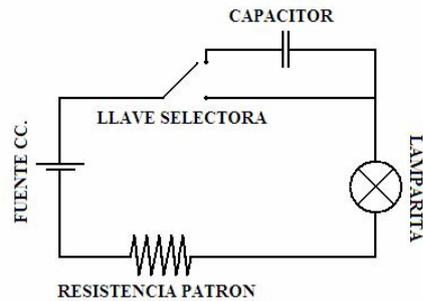


Figura 1. Circuito RC serie que utiliza una lámpara como resistor.

El procedimiento experimental consiste, primero, en encender la lámpara sin que la corriente pase por el circuito RC . Para eso el circuito dispone de un interruptor que sirve como llave selectora. De esta manera la lamparita está encendida en el momento de comenzar a cargar el condensador. Seguidamente, se cambia la posición de la llave interruptora, y se estudia el comportamiento del circuito durante la carga. Esta opción permite iniciar la carga del condensador con la resistencia "caliente", cuando está en un régimen de comportamiento no lineal.

Para registrar los datos se usó un sistema de adquisición de datos por computadora (MPLI de Vermier) y se midieron en función del tiempo las caídas de potencial en la lámpara y en la resistencia patrón v_p .

El mismo circuito sirve para realizar un barrido de la corriente por la lamparita para caracterizar el comportamiento no óhmico del filamento mediante una curva voltaje-corriente.

Posteriormente, se analizó la respuesta del circuito durante la carga del capacitor según el modelo propuesto por (14). Es necesario aclarar que el valor de la resistencia patrón utilizada para conocer el valor de corriente influye también en el comportamiento del circuito en estudio. En el modelo a utilizar, esto implica que la resistencia R_n es la suma de las resistencias de la resistencia patrón y de la lamparita para cada valor de corriente. Para la solución numérica del modelo se requieren: la corriente inicial, el valor de la resistencia de la lamparita en todo instante y la forma en que varía con la intensidad de la corriente. La solución numérica se obtuvo usando una planilla Excel.

3 RESULTADOS

A partir de los datos recopilados se realizó el gráfico de la Figura 2, donde se observa el voltaje en la lamparita en función de la corriente, obtenida como $i = v_p/R_p$. Cabe mencionar que se trata de un proceso en el que la corriente disminuye. Esto significa que en el instante inicial la corriente es máxima, y el barrido se realiza para corrientes decrecientes.

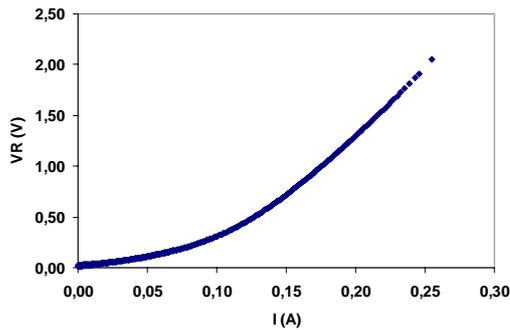


Figura 2. Voltaje en la lámpara función de la corriente

En el gráfico de la Figura 3 se presenta la variación de la resistencia a medida que la corriente disminuye, lo que muestra su comportamiento no-ohmico. De este gráfico correspondiente a $R(i)$ se obtiene el valor de dR/di . Para ello ajustamos $R(i)$ con un polinomio de grado 6 ($R^2 \approx 1$) y tomamos su derivada.

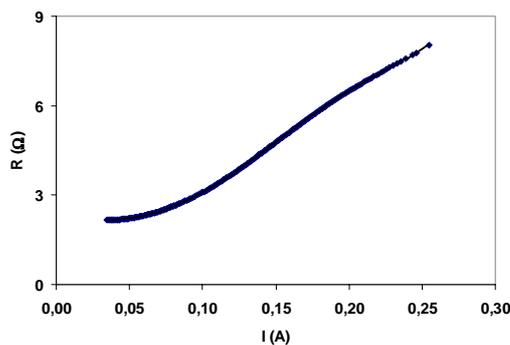


Figura 3. Variación de la resistencia en función de la disminución de corriente.

La Figura 4 muestra la variación de la corriente en el circuito RC durante la carga del condensador. Nótese el comportamiento de la corriente, que claramente no tiene una variación exponencial.

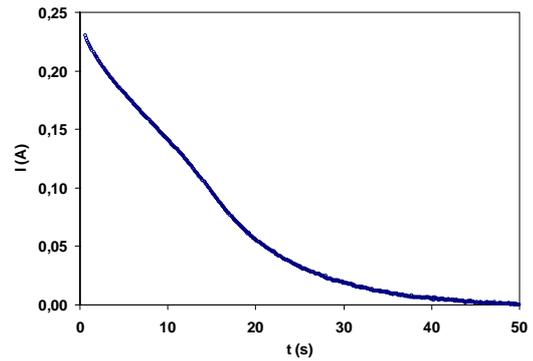


Figura 4. Carga del capacitor. Corriente en función del tiempo.

La Figura 5 muestra la comparación de la solución numérica de (14) con los datos experimentales.

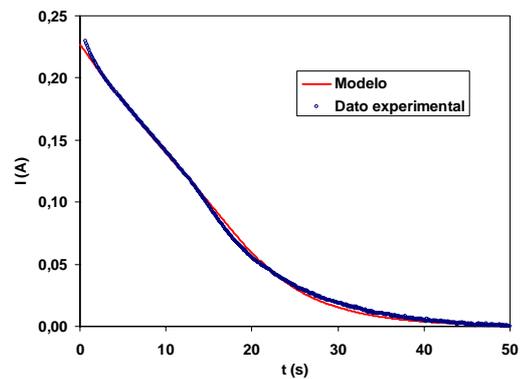


Figura 5. Representación en conjunto del modelo y los datos experimentales para el proceso de carga del condensador.

A fin de hacer un análisis más detallado del comportamiento de la lamparita, se realizó el gráfico de la Figura 6, donde se observa un comportamiento anómalo de la curva resultante. Se nota la presencia de distintas respuestas de acuerdo al aumento o disminución de la intensidad de corriente. La curva inferior corresponde al aumento de la corriente y la superior al proceso inverso, para un experimento de ciclado que duró unos 30 segundos.

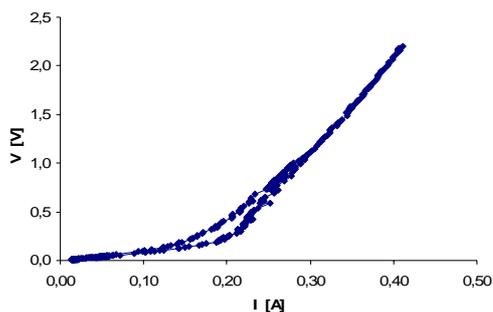


Figura 6. Comportamiento de la lamparita. Histéresis.

4 DISCUSIÓN

A partir del análisis de la Figura 2, se puede ver claramente que el comportamiento de la resistencia de la lamparita no obedece a la Ley de Ohm. El comportamiento lineal se verifica sólo para corrientes muy bajas (Figura 6). Al aumentar la corriente y por ende la temperatura, la resistencia abandona este comportamiento. De la Figura 3 se deduce la presencia de un aumento pronunciado en el valor de la resistencia de la lamparita a partir de un cierto rango de corriente.

En el gráfico de la Figura 4 se observa que la respuesta del circuito RC en estudio no se corresponde con la de un circuito del mismo tipo con una resistencia lineal. Esto se debe a la influencia de la resistencia que depende de la corriente.

La correlación existente entre el modelo propuesto en la ecuación (14) y los datos experimentales es buena para todo el intervalo medido, aunque debe realizarse una corrección de un 25% en el valor de capacidad del condensador. De todas maneras, se trata de una aproximación aceptable.

En la Figura 6 se puede distinguir una diferencia en el comportamiento de la curva voltaje-corriente generada para variaciones crecientes y decrecientes de la corriente. Este comportamiento puede ser tratado como un ciclo de histéresis.^[6]

5 CONCLUSIONES

Luego del análisis de datos, se concluye que una lamparita como la estudiada en la realización experimental no obedece a la ley de Ohm para todos los valores de corriente. La respuesta de la resistencia presenta un comportamiento aproximadamente óhmico sólo para bajas intensidades de la corriente. Cuando ésta

aumenta, se produce un cambio abrupto y se abandona el régimen lineal. Este proceso es atribuible al aumento de temperatura del filamento de la lámpara que causa variaciones no lineales de la resistividad.

A partir del estudio de la respuesta del circuito RC con una resistencia de estas características se concluye que la variación de la resistencia explicada anteriormente incide de manera directa en el comportamiento del circuito. Si bien la corriente disminuye monótonamente en el tiempo, la variación deja de ser exponencial.

La solución del modelo obtenido a partir de la ecuación del circuito tiene buena correlación con los datos experimentales.

Por último, cabe resaltar la presencia de un comportamiento anómalo de la resistencia. Se da un proceso típico de un ciclo de histéresis, que indica que la variación de la resistencia es diferente si se aumenta o disminuye de manera continua la corriente. Se puede atribuir este comportamiento a un efecto de inercia térmica.^[6]

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Dr. Eduardo Rodríguez por su permanente colaboración y dedicación para la realización del presente proyecto y a Rubén Farías por su ayuda en el desarrollo experimental.

6 REFERENCIAS

- [1] Sears F. & Zemansky M. *Física Universitaria: Volumen II*. Addison Wesley Longman, México D.F., 1999.
- [2] Ross R. & P. Venugopal, On the problem of (dis)charging a capacitor through a lamp, *Am. J. of Phys.*, **74**, 523-525, 2006.
- [3] Wagner W., Temperature and Color of Incandescent Lamps, *Phys. Teach.*, 176-177, 1991.
- [4] Denardo B., Temperature of a Lightbulb Filament, *Phys. Teach.*, **40**, 101-105, 2002.
- [5] MacIsaac D., G. Kanner & G. Anderson, Basic Physics on the Incandescent Lamp (Lightbulb), *Phys. Teach.*, **37**, 520-525, 1999.

- [6] Miranda E., S. Nikolskaia, R Riba & E. Antonio, Integrando calor y electricidad en la enseñanza de la Física, *Revista Ingeniería Académica*, **11**, 15-20, 2007.