

Estudio de las corrientes de Foucault a través del enfoque magnetostático.

Luciano Perez, Horacio Peralta, Ricardo Bianchi

perezleonardoe@arnet.com.ar, horacioarturo@hotmail.com, ericardob@yahoo.com.ar

Lab. 3, Noviembre 2003 - UBA

Prof. Dr. Salvador Gil

Abstract :En esta práctica estudiamos el fenómeno de las corrientes parásitas o de Foucault* a partir del planteo del problema magnetostático equivalente. Este enfoque, a través de la definición del concepto de 'susceptibilidad magnética efectiva', permite diseñar experimentos elementales para detectar corrientes de Foucault y se encuentra resuelto teóricamente de forma general.

En la primera parte de este trabajo utilizamos las mediciones de susceptibilidad magnética efectiva para encontrar la resistividad de distintos materiales partiendo de lo propuesto por Kraftmakher^[4]. En la segunda parte contrastamos la solución propuesta por Landau y Lifshitz^[1] para el problema electromagnético cuasi estacionario de las corrientes de Foucault.

Introducción

Corrientes de Foucault: El fenómeno^{[1],[2]}

En el presente trabajo estudiamos el fenómeno que ocurre cuando se ubica un conductor extenso en un campo magnético externo variable.

Las corrientes de Foucault son las corrientes inducidas en el cuerpo conductor por la variación en el flujo magnético. El resultado es la aparición de una f.e.m. que hace circular una corriente en el material conductor.

El problema en términos de las ecuaciones de Maxwell^{[1],[3]}

Si el período de un campo magnético variable es mucho mayor que el tiempo que le toma a la onda electromagnética para pasar a través de un sistema dado, es decir $T \gg L/c$, $\omega \ll c/L$, donde c es la velocidad de la luz y L es una dimensión lineal característica del sistema, entonces la velocidad de propagación de las perturbaciones electromagnéticas a través del sistema puede asumirse infinita. Esto implica que la tasa de cambio del campo no es muy grande dentro del conductor, y la aproximación correspondiente se conoce como aproximación *cuasi-estacionaria*.

El sistema completo de ecuaciones de campo dentro del conductor en un campo magnético variable consiste de:

$$\begin{aligned} 1. \quad \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ 2. \quad \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ 3. \quad \nabla \times \vec{H} &= \frac{4\pi\sigma\vec{E}}{c} \end{aligned}$$

En estas ecuaciones, \vec{E} es el campo eléctrico inducido resultante de la variación del campo magnético. Cuando \vec{H} es conocido, el campo \vec{E} puede ser inmediatamente obtenido de 3.

Junto con las condiciones de contorno correspondientes, 1-3 permiten resolver el problema teórico (ver Apéndice B)

Cómo estudiamos las corrientes de Foucault^{[4],[5]}

El fenómeno de las corrientes de Foucault puede ser estudiado a partir del denominado *enfoque magnetostático equivalente*. Dicho enfoque consiste en ver al conductor como un medio magnético con una magnetización promedio emergente de la densidad inducida la cual da lugar a la existencia de una susceptibilidad magnética compleja. De esta forma la detección de las corrientes de Foucault se alcanza a través de la medición de la susceptibilidad magnética.

Si se coloca un cilindro de alta conductividad, cuya longitud es mucho mayor que el radio, de forma tal que su eje principal sea paralelo a un campo magnético $\vec{H}(t) = H_0 e^{i\omega t} \hat{z}$, en el límite cuasi estacionario se inducirá una corriente en la dirección azimutal $\vec{J}(\mathbf{x}, t) = \vec{J}(r) e^{i\omega t} \hat{\phi}$, con r la componente radial y ϕ la azimutal de las coordenadas cilíndricas.

* En inglés *eddy currents*, que en español se traduce *corrientes turbulentas*.

Esta situación puede ser planteada de una manera equivalente, la dependencia del tiempo de los campos y corrientes contenida en factores de tipo $e^{i\omega t}$, puede ser omitida. Este caso puede describirse como un equivalente magnetostático del problema. Las corrientes equivalentes inducidas generarán una magnetización promedio de forma que el campo magnético promedio en el cilindro será dado por $\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}_0+\mathbf{M}_{eq})$, donde esta magnetización equivalente es proporcional al campo externo de forma: $\mathbf{M}_{eq}=\chi_{eq}\mathbf{H}_0$.

En esta ecuación, χ_{eq} es la susceptibilidad equivalente, la cual es una magnitud compleja cuya parte imaginaria representa la disipación de energía producida por las corrientes de Foucault. \blacklozenge

Resolviendo el problema equivalente, se obtiene:

$$\text{Ec I) } \chi_{eq} = \chi' + i\chi'' = \frac{2}{ka} \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} - 1$$

Donde $k=(1+i)/\delta$, siendo $\delta=(2\rho/\mu_0\omega)^{1/2}$ el llamado *ancho piel* (skin depth) que representa la profundidad de penetración del campo \mathbf{H} en el conductor. J_n es la función J de Bessel de orden n .

Tenemos de esta forma un modelo teórico para el fenómeno que puede ser contrastado por un experimento sencillo, como se explica en la segunda parte.

Partiendo de lo anterior, es decir de la definición de δ y de la ecuación I, se puede obtener una fórmula para la resistividad en función de χ' y χ''

$$\text{Ec. II) } \rho = A \cdot a^2 f / X$$

donde A es una constante $3,95 \cdot 10^{-6}$ a es el radio de la muestra y X es una función de α cuyo valor aproximado^[4] está dado por

$$X = -0.01 + 3.06z - 0.105z^2 + 0.167z^3$$

siendo $z=(\chi'/\chi'')$. De ello tenemos que al medir χ' y χ'' podemos encontrar la resistividad de cada material. \blacklozenge

Estructura lógica de nuestra práctica

Nuestro trabajo consistió esencialmente de dos partes. En la primera medimos la resistividad de distintas muestras de conductores no ferromagnéticos y en la segunda contrastamos el modelo teórico de Landau y Lifshitz^[1] para el

\blacklozenge Para más detalles sobre la equivalencia entre el comportamiento del conductor y un diamagnético ver Apéndice A.

\blacklozenge Para detalles sobre la obtención de las ecuaciones ver Apéndice B.

problema. En síntesis, la estructura de nuestro experimento se resume como sigue:

P1) **Hipótesis** : Supongamos que en la muestra se presenta el fenómeno de las corrientes de Foucault. Entonces podemos medir la resistividad con la ecuación $\rho = A \cdot a^2 f / X$.

Criterio de contraste: los valores de tabla para ρ_{Cu} y ρ_{Al}

P2) **Hipótesis** : Si el fenómeno presente en la muestra es el de las corrientes de Foucault entonces debe cumplirse lo resuelto por Landau^[1] para χ' y χ'' .

Criterio de contraste: las curvas de χ' y χ'' teóricas.

Procedimiento Experimental.

Medición de la resistividad

Para llevar a cabo las mediciones diseñamos un circuito semejante al de un transformador diferencial como se muestra en la figura 1.

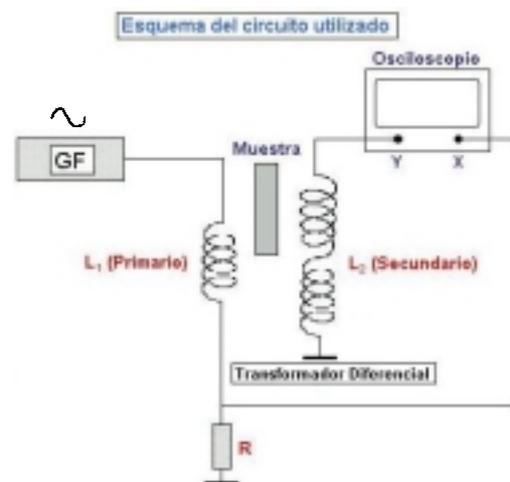


Figura 1: Circuito – Transformador diferencial.

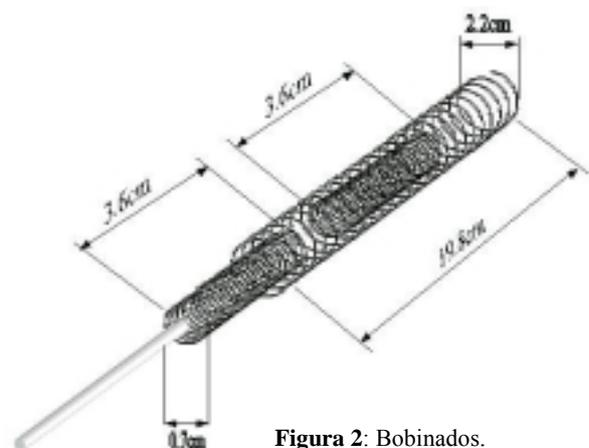


Figura 2: Bobinados.

Primario: 290 vueltas sobre soporte plástico.
Alambre de cobre esmaltado
(0,55mm de diámetro).

Secundario: 500 vueltas cada bobina sobre soporte plástico.
Alambre de cobre (0,25mm de diámetro).

Una característica de este circuito es que nos permite anular el voltaje de salida una vez ubicado el secundario en la posición adecuada sobre el eje de los bobinados. Esto es así porque se han dispuesto en el secundario dos bobinas separadas una distancia d conectadas en serie cuyos arrollamientos son en sentido inverso. Se ha tomado la precaución de dejar cierta movilidad al secundario que debe poder desplazarse dentro del primario para llegar al equilibrio deseado.

Con una muestra conductora cilíndrica dentro de uno de los secundarios aparece un voltaje de salida debido a las corrientes de Foucault en la muestra. Puesto que la muestra se introduce después de balancear el transformador, la amplitud del voltaje salida se puede interpretar como la fem inducida en la muestra. Para obtener las fórmulas con las que determinamos experimentalmente los valores de χ' y χ'' utilizamos el diagrama vectorial del circuito y la figura de Lissajous con la que determinamos los ángulos de fase. (ver Apéndice C)

$$\chi' = \left(\frac{U_y}{f \cdot U_x} \right) \sin(\alpha)$$

$$\chi'' = \left(\frac{U_y}{f \cdot U_x} \right) \cos(\alpha)$$

Donde U_x y U_y son las amplitudes de cada canal del osciloscopio y α la diferencia de fase entre ellos.

Con los valores experimentales de χ' , χ'' y α utilizamos la Ec.II para determinar ρ en función de f para cada muestra:

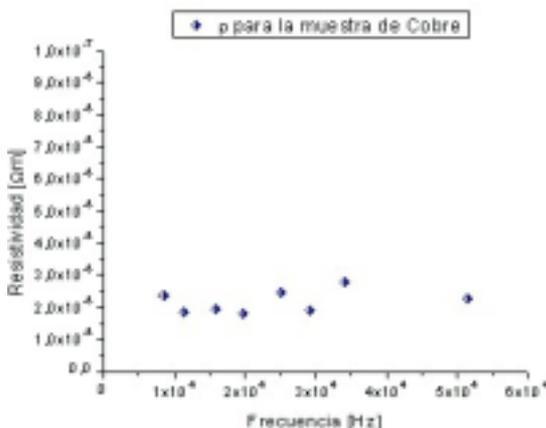


Figura 3: $\rho_{MEDIO} = 2,16 \cdot 10^{-8} \Omega m$, Dispersión 5%

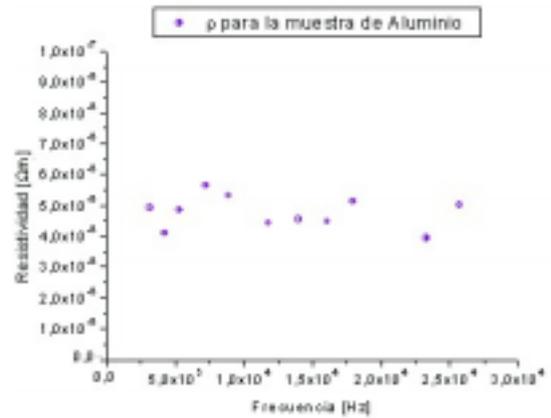


Figura 4: $\rho_{MEDIO} = 4,58 \cdot 10^{-8} \Omega m$, Dispersión 4.9%

A partir de las mediciones tenemos entonces para la muestra de cobre de diámetro 2.1mm un valor de $\rho_{cu} = 2,16 \cdot 10^{-8} \Omega m$ y para la de aluminio (3.4mm de diámetro) un $\rho_{al} = 4,58 \cdot 10^{-8} \Omega m$, valores que son consistentes con los esperados [4] de $1,77 \cdot 10^{-8} \Omega m$ para el cobre y $4,04 \cdot 10^{-8} \Omega m$ para el aluminio. Estas diferencias pueden explicarse considerando las diferencias en los materiales en relación a los datos, impurezas, etc.

Las corrientes de Foucault

Como paso siguiente, queremos contrastar la solución teórica dada por Landau [1], es decir, la Ec.I de la introducción. Con los valores medidos, construimos los gráficos de χ' y χ'' para ambas muestras

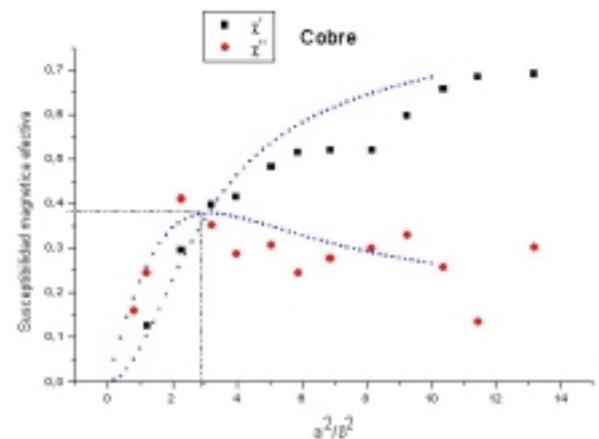


Figura 5: Curvas de susceptibilidad magnética efectiva Cobre. La curva de puntos azules es teórica.

Los errores de medición fueron estimados en un 7% para frecuencias menores a 30 KHz y en un 12%

para las frecuencias superiores a este valor, aproximadamente.
En la figura 6 se muestran las mismas curvas para el Aluminio.

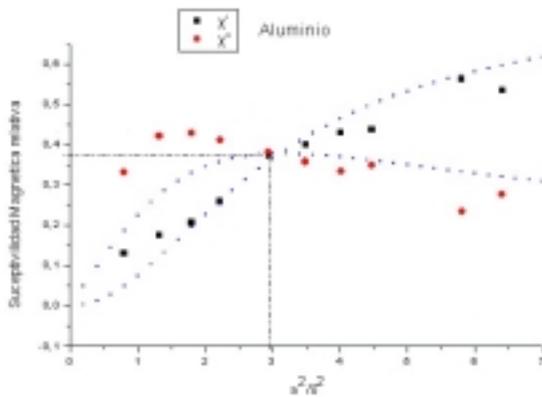


Figura 6: Curvas de susceptibilidad magnética efectiva Aluminio. La curva de puntos azules es teórica

Los errores estimados para estas mediciones son de un 8% en promedio, un poco más bajos que para el cobre.

Analizando los datos presentados podemos concluir que el contraste hecho con la teoría de Landau es satisfactorio, por cuanto los datos concuerdan con la expectativa teórica dada por la Ec.I.

Conclusiones

- ✓ Como Kraftmakher ^[4], pudimos medir ρ sin contacto y la contrastamos con el valor conocido para cada material
- ✓ Contrastamos satisfactoriamente, dentro del margen de error, la solución de Landau ^[1]
- ✓ Combinamos los experimentos de Juri ^[5] y Kraftmakher ^[4] en una forma que permite el contraste sucesivo de resultados (ρ y χ) contra expectativas, cerrando de esta forma el experimento.
- ✓ Si bien nuestros resultados no fueron tan precisos como los de Juri ^[5], nuestro experimento fue más simple, utilizando el circuito de Kraftmakher. Esto hizo que nuestra señal tuviera más ruido de lo deseable, pero nos permitió realizar la experiencia con menor complejidad del dispositivo.
- ✓ En términos generales, la práctica nos permitió ilustrar el fenómeno de las corrientes de Foucault a partir de un experimento sencillo y accesible para el nivel de nuestro laboratorio.

Referencias

- [1] Landau, L. D. y Lifshitz, E. M. *Electrodynamics of Continuous Media* Pergamon Press Oxford 1960
- [2] Feynman, R. P., Leighton, R. B. y Sands, M. *The Feynman Lectures on Physics* Vol 2 Addison Wesley, Reading Massachusetts 1966
- [3] Batigyn, V.V. y Topygin, I.N. *Problems in electrodynamics* Academic Press London 1977
- [4] Kraftmakher, Y. *Eddy currents: Contactless measurement of electrical resistivity.* Am. J. Phys. **68** (4), abril. 2000
- [5] Juri, L., Bekeris V. I., Steinmann, R. *Skin depth and complex magnetic susceptibility: An experimental alternative approach.* Am. J. Phys. **54** (9), sept. 1986
- [6] Chambers, M., Park. J. *Measurement of electrical resistivity by a mutual inductance method.* British Journal of Applied Physics Vol 12, sept. 1961
- [7] Watson, G.N. *A treatise on the theory of Bessel Functions.* Cambridge, at the University Press 1952

Apéndice A: equivalencia magnética de las corrientes parásitas en un conductor.

Si colocamos un material conductor no ferromagnético en un campo magnético variable, aún cuando su permeabilidad magnética es cercana a 1 ($\mu\phi I$) observaremos que el conductor asume un momento magnético. Si sólo consideráramos el efecto magnético de orientación de los dipolos moleculares, encontraríamos que el efecto sólo sería visible para campos externos muy fuertes. Esto se debe a que ^[1] la magnitud χ (susceptibilidad magnética), que relaciona el campo externo con la magnetización según $\mathbf{M}=\chi\mathbf{H}$, es una magnitud relativista, del orden de v^2/c^2 siendo v la velocidad de los electrones en los átomos.

La aparición del momento magnético se explica si consideramos que la aparición de corrientes circulares en la muestra produce de hecho un campo magnético adicional al que incide desde afuera, opuesto a este. El fenómeno es equivalente a la inducción de un momento magnético en la muestra de sentido contrario al campo externo. Esta equivalencia es lo que ilustra la figura.

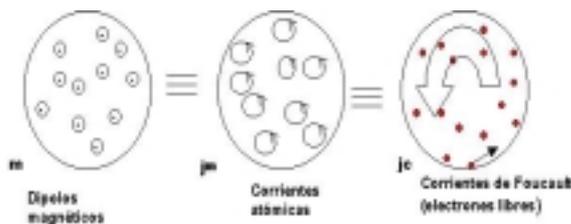


Figura 7: Equivalencia magnética de las corrientes parásitas.

Las muestras utilizadas en la práctica, cobre y aluminio, son materiales no ferromagnéticos y por ello son aplicables las consideraciones previas.

Apéndice B: El problema electromagnético de las corrientes de Foucault.^{[1],[2]}

Nuestro problema consiste en encontrar el momento magnético de un cilindro ($longitud \gg radio$) de conductividad σ y permeabilidad μ ubicado de forma tal que su eje coincide con el eje de un solenoide de sección circular, por el que circula una corriente $J=J_0e^{-i\omega t}$. El radio del cilindro es a y el del solenoide es b .

Partiendo de 1 y 3 de la introducción y eliminando \mathbf{E} , tenemos para \mathbf{H} : $\nabla^2 \bar{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$. En un campo variable de

frecuencia ω todas las cantidades dependen del tiempo a través de un factor $e^{-i\omega t}$, por lo que la

ecuación toma la forma $\nabla^2 \bar{H} = -\frac{4\pi i\omega\sigma \bar{H}}{c^2}$. Esta

ecuación, dada la simetría axial del problema puede expresarse $\frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH}{dr} + k^2 H$ donde $k=(1+i)\delta$,

$H=H_z(r)$, $H_\phi=H_r=0$, r , ϕ y z las coordenadas cilíndricas usuales. La condición de contorno es $\mathbf{H}(a)=\mathbf{H}_0$.

La solución que es finita en $r=0$ y que satisface dicha condición de borde puede expresarse en términos de la J_0 de Bessel, $H=H_0 J_0(kr)/J_0(ka)$. La densidad de corriente y el campo eléctrico pueden obtenerse de 1 y 2 de la introducción teniendo entonces

$$E_\phi = \frac{kcH_0 J_1(ka)}{4\pi\sigma J_0(ka)} \frac{a}{r} + \frac{i\omega H_0}{2cr} (r^2 - a^2) \quad a \leq r \leq b$$

De ello se tiene la densidad de corriente $j=j_\phi = \sigma E_\phi(a)$. El momento magnético debido a las corrientes inducidas será, dada la simetría del sistema, paralelo a al campo externo. Entonces, el campo magnético total afuera del cilindro será de la forma:

$$\bar{H}_2(r) = \frac{4\bar{r}(\bar{m} \cdot \bar{r})}{r^4} - \frac{2\bar{m}}{r^2} + \bar{H}_0 \quad \text{donde } \mathbf{m} \text{ es el momento}$$

magnético desconocido por unidad de longitud del cilindro. El potencial vector correspondiente es

$$\bar{A}_2 = \frac{(\bar{m} \wedge \bar{r})}{r^2} + [\bar{H}_0 \wedge \bar{r}]$$

Junto con las condiciones $\nabla \bar{A} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ y $\mathbf{H}_1(a)=\mathbf{H}_2(a)$ alcanzan para deducir

$$\bar{m} = -\frac{1}{2} a^2 H_0 \left[1 - \frac{2 J_1(ka)}{ka J_0(ka)} \right]$$

que hemos llamado χ_{eq} , susceptibilidad equivalente o efectiva. El resultado de la Ec.II para ρ puede obtenerse tras la inversión de dicha relación y una aproximación a tercer orden.

Apéndice C: medición de χ y χ''

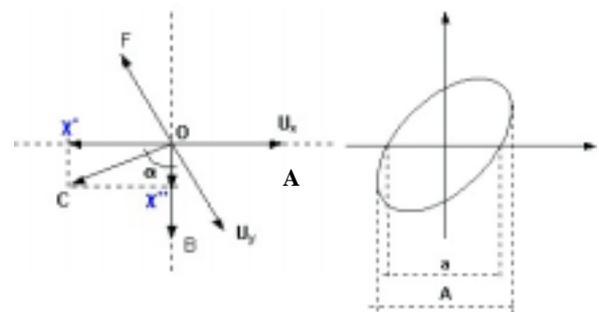


Figura 8: Diagrama vectorial del circuito y figura de Lissajous.

OA: Corriente alterna en el primario y campo magnético creado.

OB: Fem creada en la muestra.

OC: Corrientes de Foucault y magnetización de la muestra

$$\text{Sin}(\alpha) = \pm a/A$$

El voltaje de salida del transformador, U_y , es también proporcional a la amplitud y la frecuencia de la corriente alimentando el primario. La parte real e imaginaria de χ_{efec} están dadas entonces por

$$\chi' = \left(\frac{U_y}{f \cdot U_x} \right) \text{Sin}(\alpha)$$

$$\chi'' = \left(\frac{U_y}{f \cdot U_x} \right) \text{Cos}(\alpha)$$

en unidades arbitrarias.

Para obtener el factor de escala adecuado para la corrección de las anteriores ecuaciones partimos del hecho de que el opuesto de la parte real y la parte imaginaria de χ (Ec.II) se cortan en $\chi' = \chi'' = 0,377$. Con este dato se corrigen las escalas con las que se obtienen las graficas experimentales de las figuras 5 y 6 y sus expectativas teóricas.

Apéndice D: Precauciones experimentales

- ✓ Cada vez que se varíe el valor de la frecuencia debe tomarse la precaución de ubicar el secundario de forma tal que se anule el voltaje de salida antes de introducir la muestra.
- ✓ En caso de encontrar ruidos en las señales de salida se puede incluir en el circuito un capacitor en paralelo con las bobinas del secundario.