

Medición de equipotenciales y resolución de la ecuación de Laplace

Por Natalia Krom, Federico Nuevo y Pablo Etchemendy

e-mail: pabloee@gmail.com

Laboratorio 3 - FCEyN – UBA 2005

En el presente trabajo se analiza la analogía que existe entre un sistema electrostático de conductores cargados y un sistema que conduce una corriente constante. Ambos sistemas cumplen con la ecuación de Laplace ($\nabla^2\phi = 0$).

Realizamos una determinación experimental del potencial electrostático en un espacio bidimensional. Para ello utilizamos un recipiente de agua, y varios conductores sumergidos en el mismo, en diversas configuraciones, fijando sus potenciales mediante fuentes de continua.

Luego, comparamos éstos resultados con los obtenidos al solucionar numéricamente la ecuación de Laplace (usando el método de relajación). Para el cálculo tuvimos en cuenta las condiciones de borde que debe cumplir la solución para cada problema determinado.

Hubo acuerdo cualitativo entre lo predicho teóricamente y lo observado, en todos los casos. Esto hace pensar que podría ser exitosa una comparación cuantitativa, lo cual no se hizo por no disponer de una estimación del error numérico

Marco teórico

Consideremos un medio conductor, óhmico, homogéneo, bajo condiciones de conducción de estado estacionario. Esto implica que la densidad de carga local $\rho(x, y, z)$ está en su valor de equilibrio, y $\partial\rho/\partial t = 0$ para cada punto del medio.

En consecuencia, la ecuación de continuidad

$$\partial\rho / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.1)$$

se reduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.2)$$

donde \mathbf{J} es el vector densidad de corriente.

La ley de Ohm dice que en un metal a temperatura constante la densidad de corriente \mathbf{J} es proporcional al campo eléctrico \mathbf{E}

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E} \quad (1.3)$$

donde g es una constante de proporcionalidad llamada conductividad. (Los materiales que cumplen esta ley son los llamados óhmicos).

Combinando 1.2 y 1.3 obtenemos

$$\nabla \cdot g\mathbf{E} = 0 \quad (1.4)$$

que para un medio homogéneo se reduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.5)$$

Pero ya que $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ para un campo estático, \mathbf{E} puede derivarse de un potencial escalar

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (1.6)$$

Combinando 1.5 y 1.6 obtenemos

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (1.7)$$

que es la ecuación de Laplace, de manera que un problema de conducción de estado estacionario puede resolverse en la misma manera que los problemas electrostáticos.

Como las paredes del recipiente no son conductoras, la corriente en la solución solo puede correr paralela a ellas. Esto significa que \mathbf{J} no tiene componente perpendicular en la superficie de una pared que no es conductora. Allí tendremos

$$\delta\phi / \delta n = 0 \quad (1.8)$$

donde n indica la normal a la superficie, y p la tangente. A ésta condición de borde se la conoce como condición de Neumann y es análoga a un extremo libre en una cuerda.

El otro caso interesante se presente en las paredes de un conductor. En una interfase agua-metal, tendremos

$$J_{1n} = J_{2n} \quad (1.9)$$

debido a la ecuación de continuidad. Aquí los subíndices 1 y 2 se refieren al agua y al metal, respectivamente.

La ecuación 1.9 puede escribirse

$$g_1 E_{1n} = g_2 E_{2n} \quad (1.10)$$

Como la conductividad del metal es mucho mayor que la del líquido ($10^7 (\Omega\text{m})^{-1}$ vs $10^{-3} (\Omega\text{m})^{-1}$, en orden de magnitud) vemos que

$$(g_1 / g_2) E_{1n} = E_{2n} \sim 0 \quad (1.11)$$

Esperamos que el campo eléctrico en el metal sea despreciable frente al del agua; es decir que podemos considerar a la superficie conductora como una equipotencial. Aplicando la ley de inducción de Faraday a la interfase agua-metal obtenemos

$$E_{1p} = E_{2p} \quad (1.12)$$

Como el potencial en el metal es casi constante, $E_{1p} \sim 0$. Entonces, el campo eléctrico en el agua es perpendicular a la superficie conductora. Concluimos que en esas superficies

$$\phi = \text{constante} \quad (1.13)$$

A ésta condición de borde se la conoce como condición de Dirichlet, y es análoga a un extremo fijo en una cuerda vibrante.

Arreglo experimental

Utilizamos varios conductores de cobre sumergidos en una solución conductora, y conectados a fuentes externas de potencial mediante cables. (Ver figura 1). La base del recipiente es un rectángulo de 22,9 cm x 30,7 cm. Se llenó el recipiente con 1,5 l de agua de la canilla (un nivel de agua de ~ 2 cm).

Una fuente de corriente continua con salidas de 0V, 5V y ± 15 V nos sirvió para lograr diferentes combinaciones de potenciales. La punta de un voltímetro nos sirvió para explorar el potencial en la solución, y así hacer un esquema de las superficies equipotenciales. Ubicamos una grilla cuadrículada debajo del recipiente para determinar con facilidad las coordenadas del punto cuyo potencial se estaba midiendo. (Ver figura 2). La grilla estaba dividida en 17 columnas y 12 filas, de 1,4 cm de lado cada una. Entonces, el error para las coordenadas espaciales es de $\pm 0,7$ cm.

Estimamos el error para el potencial midiéndolo en el centro y luego cerca de los bordes, para diversas celdas. La diferencia nunca fue superior a $\pm 0,3$ V, por lo que tomamos esa cota para todas las mediciones de potencial.

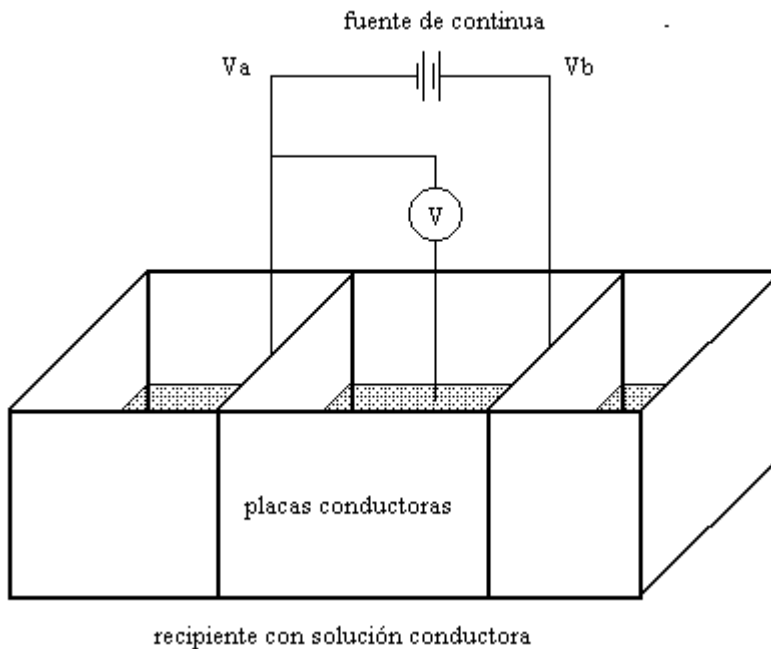


Figura 1: esquema del experimento.

Para estimar la resistencia en el líquido, colocamos las placas en los bordes del recipiente, y medimos con un amperímetro la corriente que circulaba al aplicarles un voltaje de 5 V. Observamos una corriente de 5 mA. Aplicando la ley de Ohm

$$R = I / V = 5 \text{ mA} / 5 \text{ V} = 1 \text{ k}\Omega$$

la cual es despreciable frente a la resistencia del voltímetro ($\sim 1 \text{ M}\Omega$), por lo que su uso no afectará la mediciones. (De otra manera, sería necesario armar un puente de resistencias, o usar un instrumento menos práctico, como puede ser un electrómetro).

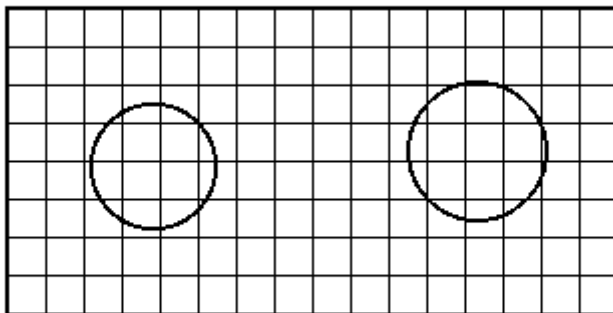


Figura 2: vista superior del recipiente. Se realizó una medición para cada división de la cuadrícula

Armos las siguientes configuraciones. (Ver figuras 3 a 8)

Configuración 1

Ubicamos dos placas separadas por una distancia de 12,5 cm, con una diferencia de 5 V.

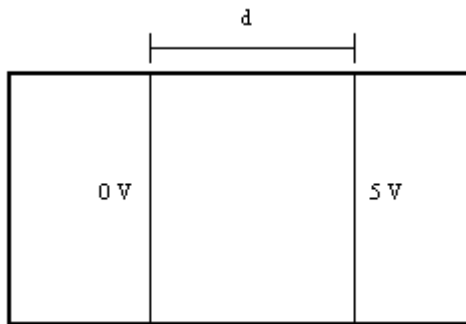


Figura 3: configuración 1.

Configuración 2

Ubicamos dos cilindros en el recipiente, con una diferencia de 5 V.

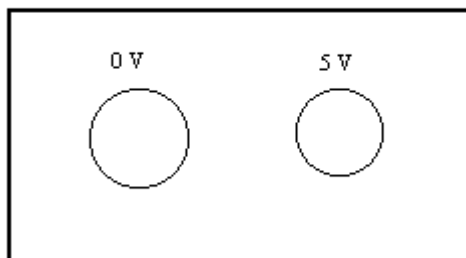


Figura 4: configuración 2.

Configuración 3

Ubicamos dos placas paralelas, a 0 V y 5 V, como en la configuración 1, y agregamos dos cilindros, uno a 0 V y el otro a 3,3 V.

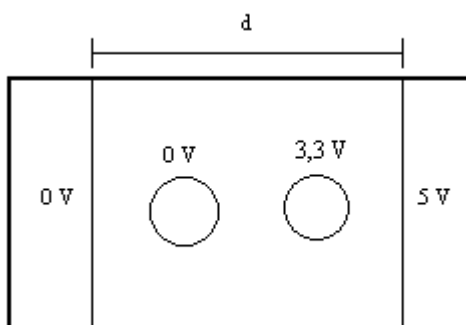


Figura 5: configuración 3.

Configuración 4

Ubicamos dos placas paralelas con una diferencia de 5 V, y dos más perpendiculares a las primeras, que no estaban fijas a ningún potencial exterior. Esos potenciales se desconocen a priori, pero pueden determinarse simplemente aplicándoles un téster a los cilindros, ya que cada uno conforma una equipotencial. Ambos son iguales a 2,8 V.

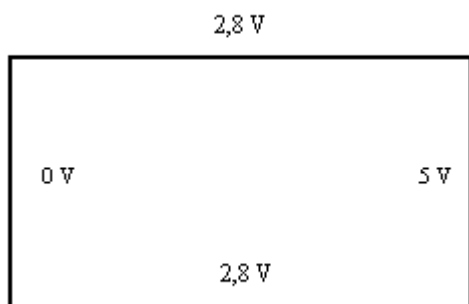


Figura 6: configuración 4.

Configuración 5

Idéntica a la configuración 4, pero ahora fijamos desde el exterior los potenciales de todas las placas. Ahora están a 0 V, 5 V, 15 V y -15 V.

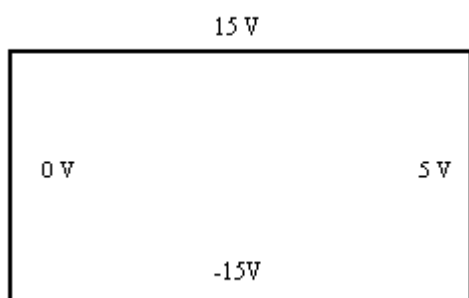


Figura 7: configuración 5.

Configuración 6:

Pusimos placas en las cuatro paredes, fijas a 5 V, y un cilindro en el medio, a 0 V.

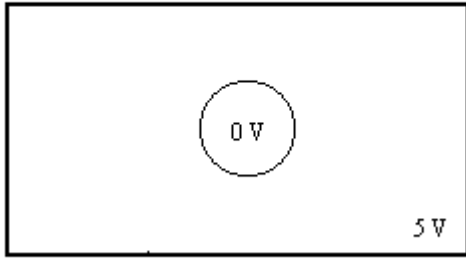


Figura 8: configuración 6.

Resultados y análisis

A continuación se presentan los potenciales medidos para las seis configuraciones, y los potenciales teóricos calculados numéricamente, en gráficos de superficies en 3-D. Para algunas configuraciones también incluimos un corte longitudinal de la superficie, para un valor fijo de la coordenada x o y.

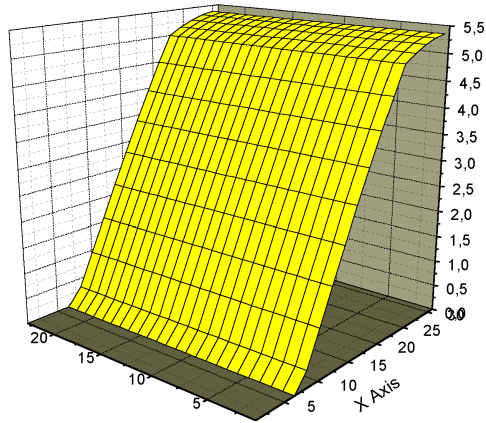


Gráfico 1.a: valores calculados para la configuración 1.

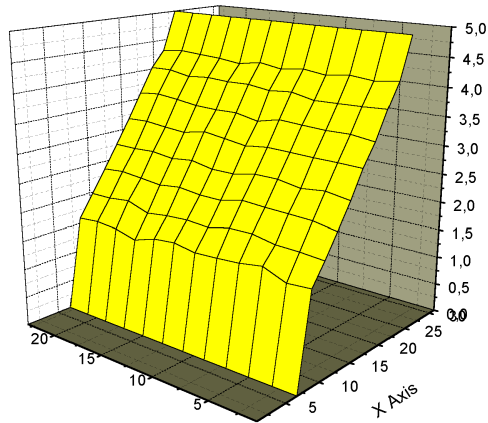


Gráfico 1.b: valores medidos para la configuración 1.

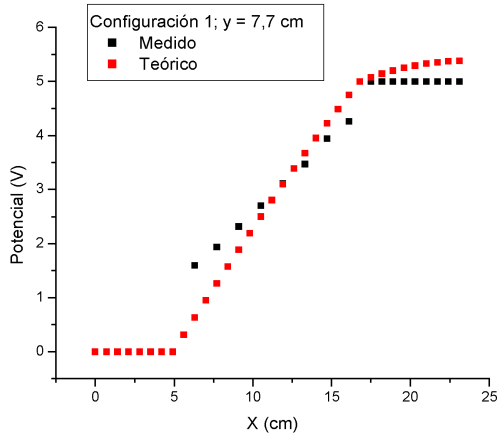


Gráfico 1.c: valores medidos para y = 7,7 cm.

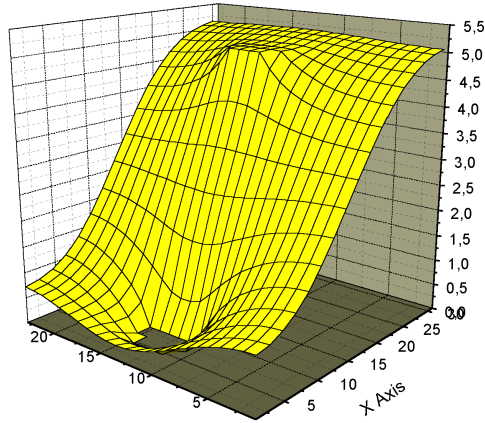


Gráfico 2.a: valores calculados para la configuración 2.

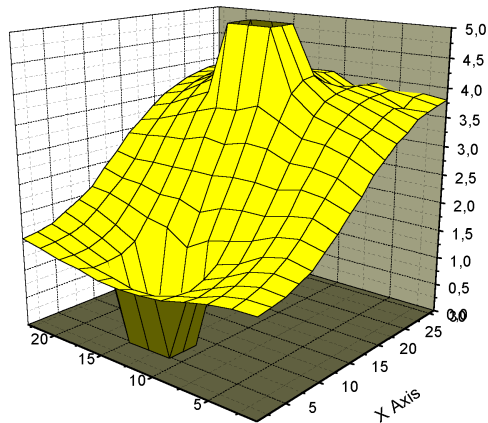


Gráfico 2.b: valores medidos para la configuración 2.

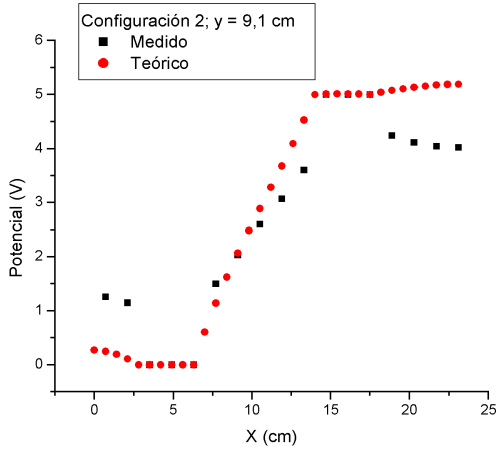


Gráfico 2.c: valores medidos para y = 9,1 cm..

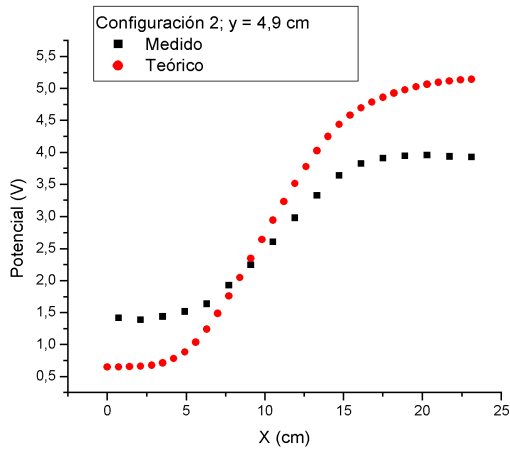


Gráfico 2.d: valores medidos para y = 4,9 cm.

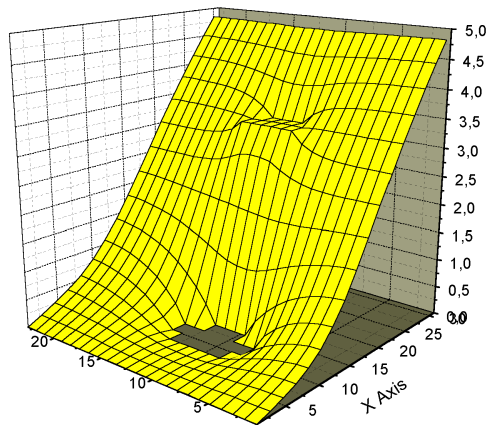


Gráfico 3.a: valores calculados para la configuración 3.

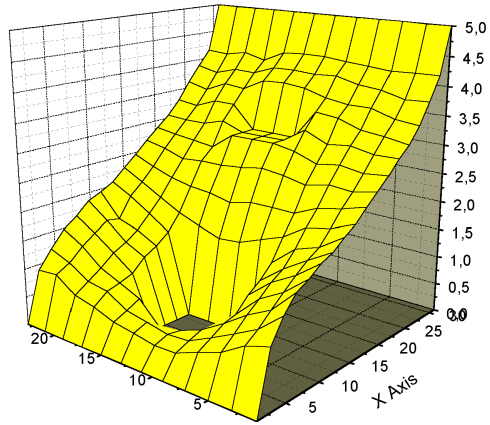


Gráfico 3.b: valores medidos para la configuración 3.

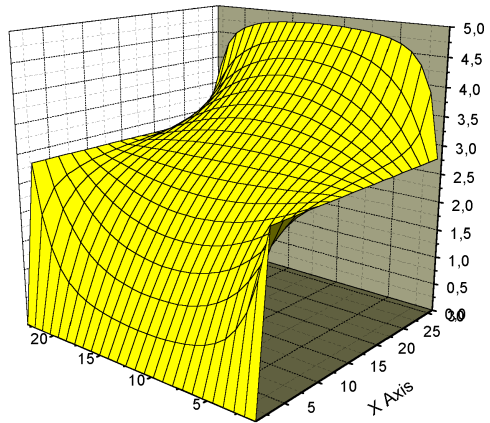


Gráfico 4.a: valores calculados para la configuración 4.

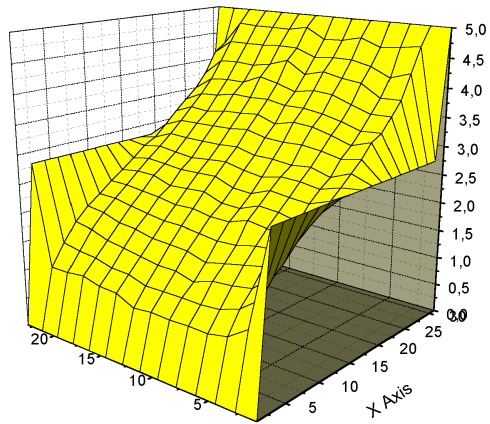


Gráfico 4.b: valores medidos para la configuración 4.

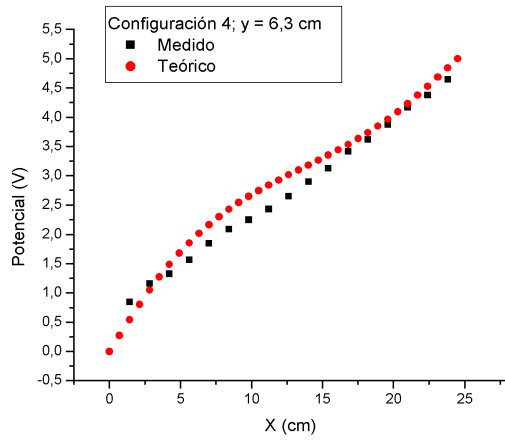


Gráfico 4.c: valores medidos para y = 6,3 cm.

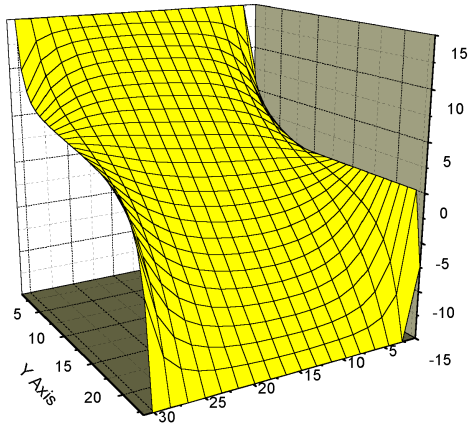


Gráfico 5.a: valores calculados para la configuración 5.

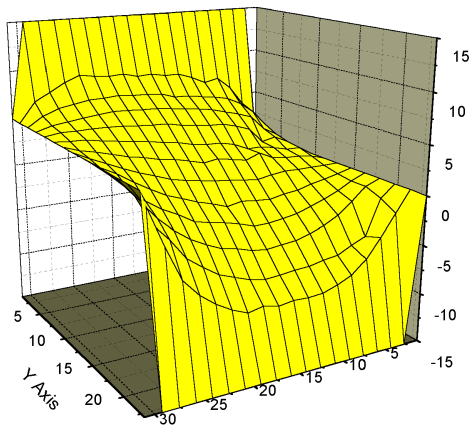


Gráfico 5.b: valores medidos para la configuración 5.

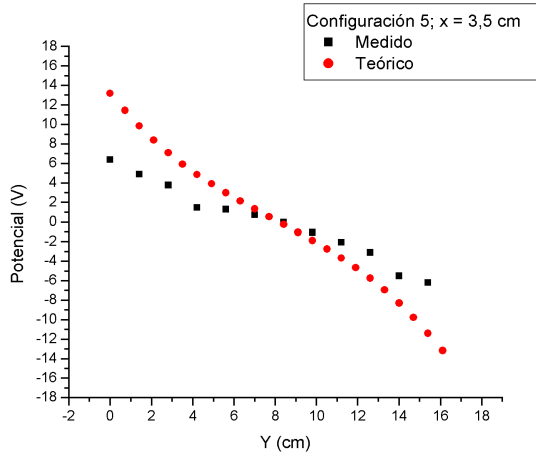


Gráfico 5.c: valores medidos para $x = 3,5$ cm.

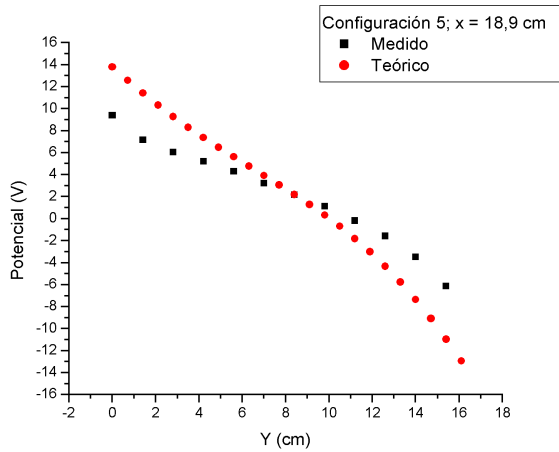


Gráfico 5.d: valores medidos para $x = 18,9$ cm.

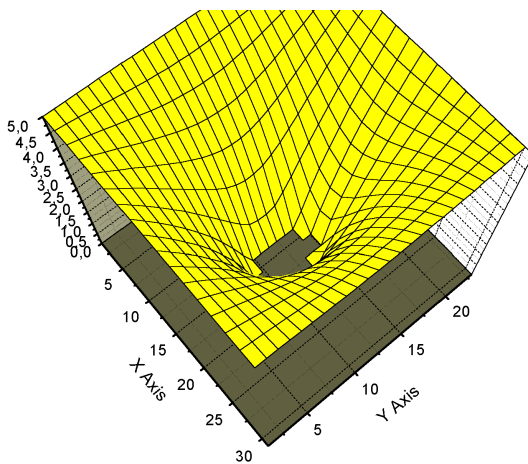


Gráfico 6.a: valores calculados para la configuración 6.

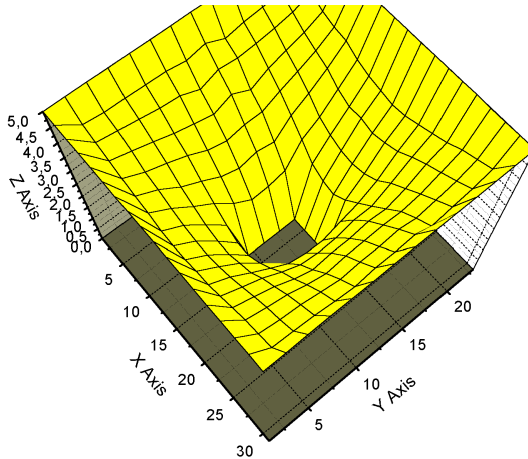


Gráfico 6.b: valores medidos para la configuración 6.

Como puede verse en los gráficos 1-6, a y b, hay una clara similitud entre teoría y experimento, al menos cuantitativamente. En los gráficos restantes (1c, 2c, 2d, 4c, 5c y 5d) puede verse más detalladamente la similitud existente.

Conclusiones

En la experiencia, se intentó verificar experimentalmente las consecuencias teóricas de las ecuaciones de Maxwell en condiciones electrostáticas; en otras palabras comparamos nuestras mediciones con los valores obtenidos numéricamente al resolver la ecuación de Laplace.

Graficamos el potencial para las distintas configuraciones en función de sus coordenadas espaciales, obteniendo un gráfico tridimensional. Esto se realizó tanto para las mediciones como para los valores teóricos. Encontramos un acuerdo cualitativo entre lo predicho teóricamente y lo observado en el laboratorio. Si se pudiera estimar el error numérico de los datos obtenidos mediante el método de relajación, se podría llevar a cabo una comparación cuantitativa.

El experimento es de fácil implementación, y podría llevarse a cabo con configuraciones más complicadas (por ejemplo, incluyendo dieléctricos no solo en los bordes). Debería buscarse una manera de mejorar la finura del reticulado (es decir, de observar una mayor cantidad de puntos) sin que se pierda la agilidad de la forma de recolectar los datos.

También podría llevarse a cabo otro tipo de cálculos, por ejemplo, campo eléctrico, densidad de corriente (conociendo previamente la conductividad) y otros.

Concluimos que obtuvimos resultados aceptables, y que éstos pueden servir para realizar un análisis más amplio.

Acerca del método de relajación

La ecuación de Laplace en \mathbb{R}^2 es

$$\nabla^2 f = \partial^2 f(x_0, y_0) / \partial x^2 + \partial^2 f(x_0, y_0) / \partial y^2 = 0 \quad (1)$$

Se puede desarrollar en serie de Taylor alrededor de x_0

$$f(x_0 + h, y_0) = f(x_0, y_0) + \partial f / \partial x h + O(h^2) \quad (2)$$

$$f(x_0 - h, y_0) = f(x_0, y_0) - \partial f / \partial x h + O(h^2) \quad (3)$$

Lo cual implica

$$\partial f^+ / \partial x = (f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)) / h \quad (4)$$

$$\partial f^- / \partial x = (f(x_0 - h, y_0) - f(x_0, y_0)) / h \quad (5)$$

Entonces

$$\partial f(x_0, y_0) / \partial x = (f(x_0 + h, y_0) - f(x_0 - h, y_0)) / 2h \quad (6)$$

Combinándolo todo se deduce que las derivadas segundas a izquierda y derecha vienen dadas por

$$\partial^2 f^+ / \partial x^2 = (f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - h \partial f(x_0, y_0) / \partial x) / h^2 \quad (7)$$

$$\partial^2 f^- / \partial x^2 = (f(x_0, y_0) - f(x_0 - h, y_0) - h \partial f(x_0, y_0) / \partial x) / h^2 \quad (8)$$

Entonces, la derivada segunda puede escribirse

$$\partial^2 f(x_0, y_0) / \partial x^2 = (f(x_0 + h, y_0) - 2f(x_0, y_0) + f(x_0 - h, y_0)) / h^2 \quad (9)$$

Todo esto se puede repetir para un desplazamiento k en la variable y , alrededor de y_0 , obteniéndose

$$\partial^2 f(x_0, y_0) / \partial y^2 = (f(x_0, y_0 + k) - 2f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0 - k)) / h^2 \quad (10)$$

(Esto es aproximar la derivada segunda por tres puntos).

Volviendo a la ecuación de Laplace, que es la que nos interesa,

$$\nabla^2 f = f(x_0 + h, y_0) + f(x_0 - h, y_0) + f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0 - k) - 4f(x_0, y_0) = 0 \quad (11)$$

Así, podemos despejar $f(x_0, y_0)$

$$f(x_0, y_0) = (f(x_0 + h, y_0) + f(x_0 - h, y_0) + f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0 - k)) / 4 \quad (12)$$

Para el cálculo, se divide el plano en celdas cuadradas. (En ese caso $h = k$) Las celdas que están fijadas a un potencial, reciben ese valor desde el comienzo, y no se lo modifica en todo el proceso. (La condición de Dirichlet es más general. Incluye los casos en los que se tienen conductores, pero no se conoce el valor de su potencial. El cálculo de esos valores es más complicado, y no se incluye en el presente trabajo). Las que cumplen con la condición de Neumann son obligadas a tomar el valor del punto más cercano que no esté sujeto a ninguna condición de borde. (Usamos esa condición sólo en el perímetro del recipiente. Entonces, hay un solo punto cercano cuyo valor debe asignarse al borde. Si en cambio se aplicara a puntos en el interior del recipiente, habría que pedir que ese punto sea igual a más de un punto adyacente, y eso complica el algoritmo). De esa manera, la variación entre esas dos celdas es cero. Los puntos restantes se calculan usando la fórmula 12, iterando una determinada cantidad de veces, o hasta que cada iteración trae una mejora menor a cierto valor de tolerancia. (Es decir, se corta el proceso cuando una iteración trae una variación insignificante).

El método de relajación no nos permitió tener un error para los valores calculados. (El algoritmo de cálculo no era el objetivo del trabajo; no tuvimos tiempo de conseguir uno más refinado). De conocerse ese error, podría realizarse una comparación cuantitativa entre lo observado y lo teórico. (Para esto no hace falta repetir la experiencia; simplemente calcular con el nuevo algoritmo las soluciones a la ecuación de Laplace).

Bibliografía

1. J. R. Reitz, F. J. Milford y R. C. Christy, *Fundamentos de la teoría electromagnética*, 3era edición, Addison Wesley Iberoamericana.
2. Salvador Gil, Martín Saleta y Dina Tobia, "Experimental Study of the Neumann and Dirichlet boundary conditions in two-dimensional electrostatic problems", *Am J. Phys.* **70**, 1208-1213 (2002).