

# Osciladores armónicos acoplados

## Repulsión de frecuencias en circuitos RLC

Rodolfo Gamarra, Mariela Josebachuili, Pía Zurita

[reamarra@gmail.com](mailto:reamarra@gmail.com), [mariejoseba@gmail.com](mailto:mariejoseba@gmail.com), [megamitemis@yahoo.com.ar](mailto:megamitemis@yahoo.com.ar)

Laboratorio 5 - Cátedra Dr. S. Gil

Facultad de Cs. Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires  
2do cuatrimestre 2006

*En el presente informe estudiamos el fenómeno de acoplamiento entre dos circuitos RLC. Propusimos un modelo mediante el cual pudimos obtener con precisión las frecuencias de resonancia del sistema acoplado, comparándolas luego con las frecuencias de los circuitos libres. Asimismo determinamos la dependencia del coeficiente de acoplamiento ( $M$ ) con la distancia entre las bobinas y relacionamos éste con la separación entre las frecuencias características del sistema acoplado. A partir de los resultados notamos una analogía con el efecto cuántico de repulsión de niveles.*

### INTRODUCCIÓN

En un sistema cuántico compuesto por dos electrones el nivel de energía fundamental se desdobra en dos niveles distintos entre sí, y distintos del fundamental. Un fenómeno similar tiene lugar en un sistema de dos osciladores clásicos acoplados<sup>1</sup>. En este caso si resolvemos las ecuaciones de movimiento, llegamos a que el sistema acoplado tiene dos modos normales de oscilación, cuyas frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  satisfacen

$$|\omega_2^2 - \omega_1^2| \geq |\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2| \quad (1)$$

siendo  $\omega_{01}$  y  $\omega_{02}$  las frecuencias naturales de los dos osciladores desacoplados<sup>2</sup>. Además esta diferencia es tanto mayor cuanto mayor sea el acoplamiento entre los osciladores. Dicho comportamiento se puede representar teóricamente según la expresión:

$$|\omega_1^2 - \omega_2^2| = 2\sqrt{\frac{\mu^2}{4} \cdot (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)^2 - \mu \cdot (\omega_{10}^2 \cdot \omega_{20}^2)} \quad (2)$$

donde  $\mu$  es una medida de acoplamiento entre los osciladores<sup>2</sup>. Este fenómeno recibe en Mecánica Cuántica el nombre de “repulsión de niveles”.

Una forma de ver este comportamiento y poner a prueba la validez de la analogía es estudiar la respuesta en frecuencia en función de la distancia entre las inductancias de dos circuitos RLC acoplados

Esquemáticamente representamos la situación en la Figura 1.

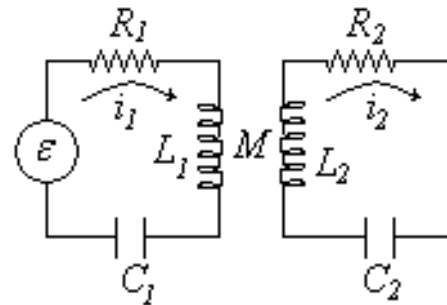


Figura 1. Sistema en estudio.

El circuito primario es aquel que forzamos con una señal senoidal  $\varepsilon$ .  $R_1$  y  $R_2$  incluyen las resistencias de las inductancias correspondientes y de los cables.  $M$  es el factor de acoplamiento. La presencia de  $i_2$  en el secundario representa energía entregada al secundario por la fuente y en consecuencia la amplitud y fase de  $i_1$  va a estar determinada no sólo por la impedancia del primario, sino además por la del secundario. Dicho de otro modo, la impedancia de cada circuito va a ser distinta si se encuentran alejados o cerca<sup>3</sup>. Llamaremos  $Z_{1,2}$  a la impedancia de cada circuito por separado, y  $Z_{1,2}'$  a la impedancia de cada circuito en presencia del otro.

$$Z_{1,2} = R_{1,2} + j\left(\omega L_{1,2} - \frac{1}{\omega C_{1,2}}\right) = R_{1,2} + jX_{1,2} \quad (3)$$

Empleando notación compleja, podemos escribir para el primario

$$\varepsilon = i_1 Z_1 - j\omega M i_2, \quad (4)$$

y para el secundario

$$0 = i_2 Z_2 - j\omega M i_1 \quad (5)$$

donde adoptamos el signo negativo para la fem generada por mutua inducción. Entonces, si consideramos que la fem aplicada al primario es la corriente que circula por el mismo multiplicada por una impedancia equivalente  $Z_1'$ , llegamos a

$$i_1 \left( Z_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_2} \right) = i_1 Z_1' \quad (6)$$

Entonces la impedancia equivalente para el primario es

$$Z_1' = \left( R_1 + \frac{\omega^2 M^2 R_2}{R_2^2 + X_2^2} \right) + j \left( X_1 - \frac{\omega^2 M^2 X_2}{R_2^2 + X_2^2} \right)$$

Luego, el efecto producido por el secundario en el primario es el de añadir una impedancia al circuito. Si ahora resolvemos las ecuaciones para hallar las amplitudes de las corrientes usando notación compleja, obtenemos para las amplitudes efectivas

$$I_1 = \frac{\varepsilon (R_2^2 + X_2^2)^{\frac{1}{2}}}{D} \quad (7)$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon \omega M}{D} \quad (8)$$

con

$$D = \left[ (R_1 R_2 - X_1 X_2 + \omega_2 M_2)^2 + (R_1 X_2 + R_2 X_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

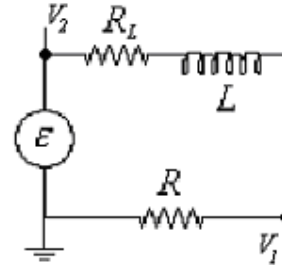
Ajustando la curva de  $i_2$  en función de la frecuencia, podemos determinar a partir de la ec. 8 el valor de  $M$ . Otro camino posible es medir tanto  $i_1$  como  $i_2$ . Tomando el cociente entre las ecs. 8 y 7 y despejando, vemos que

$$M = \frac{I_2}{\omega I_1 (R_2^2 + X_2^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (9)$$

Usando todo esto nos proponemos determinar la validez del modelo y corroborar la relación establecida por la ec. 1.

## PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

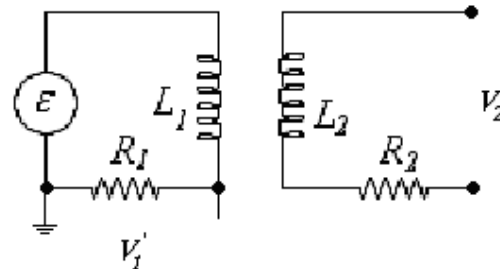
Comenzamos por determinar las inductancias de tres bobinas diferentes empleadas en este trabajo. Para ello armamos con cada bobina un circuito RL y lo excitamos con una señal senoidal, como se indica en la Figura 2.



**Figura 2.** Esquema del dispositivo para la determinación de  $L$ . Medimos  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $R$  y  $R_L$  y determinamos el valor de la inductancia, sabiendo que

$$L \frac{di}{dt} = V_2 - V_1 \left( 1 + \frac{R_L}{R} \right)$$

Una vez hecho esto, analizamos el coeficiente de acoplamiento en función de la distancia para un par cualquiera de bobinas. Para ello armamos con circuitos como indica la Figura 3.



**Figura 3.** Circuitos utilizados para encontrar la relación entre  $M$  y la distancia entre las bobinas.

Medimos  $V_1'$  y  $V_2'$  y usando

$$M \frac{di_1'}{dt} = V_2'$$

hallamos  $M$  para diferentes separaciones entre las bobinas. Esta ecuación surge a partir de considerar que la impedancia de nuestro instrumento de medición es muy grande, por lo que la corriente  $i_2$  tiende a cero, entonces la tensión medida surge del acoplamiento.

Posteriormente corroboramos nuestras mediciones de  $L$  añadiendo a cada circuito un condensador cuya capacitancia medimos con un multímetro. Luego registramos la tensión sobre la resistencia, excitando el circuito RLC con una señal senoidal. Realizamos

un barrido en frecuencia, mediante un Lock-In, y registramos el módulo de la corriente en el circuito (tensión dividida por la resistencia sobre la que se midió). Sabiendo que el máximo se produce a la frecuencia natural del circuito encontramos que en los tres casos los  $L$  así hallados concordaban con los obtenidos por el método anterior.

A continuación cerramos uno de los circuitos RLC (el circuito que llamamos secundario) y lo colocamos como se indica en la Figura 4. El montaje se efectuó sobre una varilla graduada, a fin de conocer la distancia que separa las bobinas con precisión de 0,1mm. Además medimos con calibre las dimensiones de los bobinados.

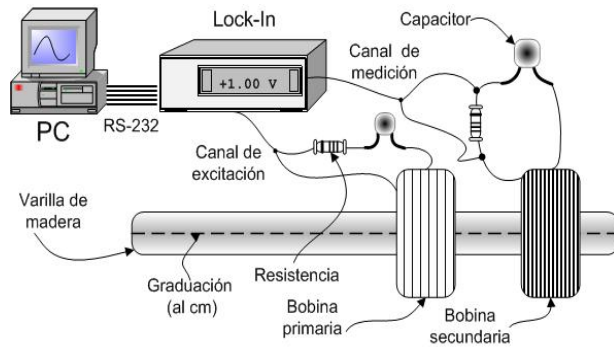


Figura 4. Esquema del dispositivo experimental.

Cada una de la bobinas tenía 1040 vueltas de alambre de 0.4mm de diámetro. Empleamos el Lock-In para excitar el primario y registramos la corriente sobre la resistencia del secundario en función de la frecuencia. Después hicimos lo mismo midiendo la caída de tensión sobre la resistencia del primario. Repetimos la experiencia para distintas separaciones entre las bobinas (y por lo tanto para diferentes valores de acoplamiento). De esta forma se pudo obtener la relación entre la amplitud y la frecuencia, al igual que habíamos hechos con los circuitos libres. Notar que, puesto que las resistencias que empleamos en los circuitos RLC fueron pequeñas (decenas de  $\Omega$ ), tuvimos que incluir en el modelo teórico del circuito forzado (primario) la impedancia de salida del Lock-In (entre 50 y 60  $\Omega$ ).

Por último introdujimos un tercer circuito RLC cerrado entre el primario y el secundario, y realizamos las mediciones con este circuito intermediario. El tratamiento realizado para este caso se presenta en el apéndice junto con los resultados obtenidos.

## PROCESAMIENTO DE DATOS

Comenzamos por registrar las tensiones en el primario y en el secundario, para diferentes separaciones de las bobinas, como indican las Figuras 5 y 6. Incluimos además en sendas figuras, los resultados obtenidos para los circuitos libres.

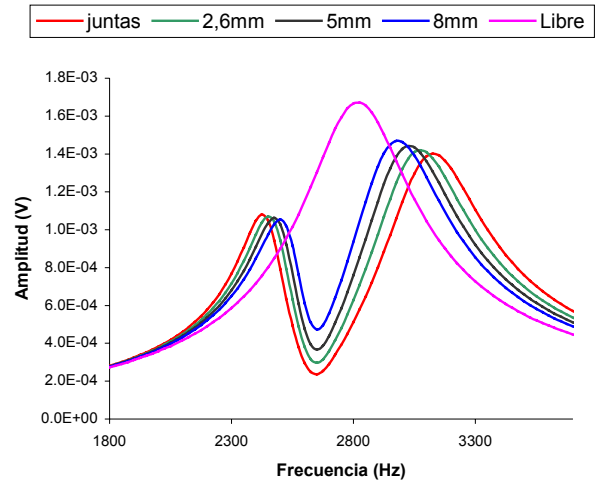


Figura 5. Datos experimentales al circuito primario para distintas separaciones entre las bobinas.

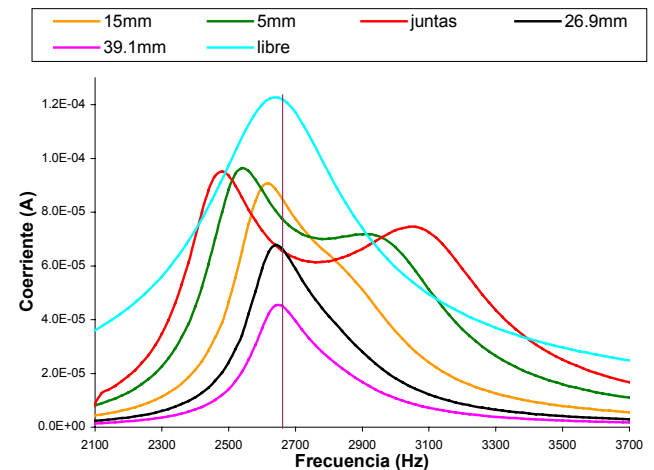
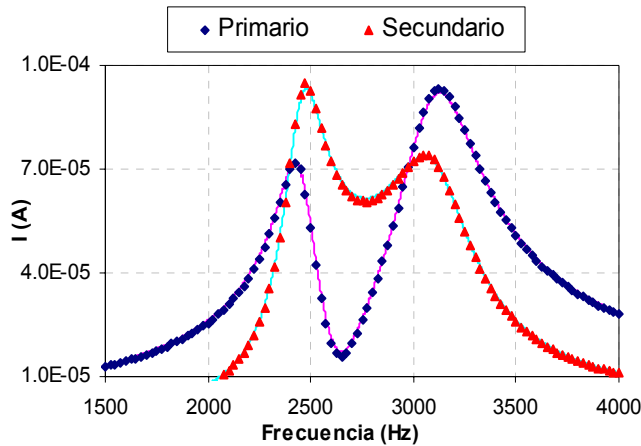


Figura 6. Valores medidos de amplitud para la corriente del secundario en función de la frecuencia para diferentes distancias entre los bobinados.

Nótese cómo en ambos casos a medida que aumenta la separación entre las bobinas los picos de máxima corriente se desplazan uno hacia el otro. Esto se debe a que el acoplamiento  $M$  disminuye con la distancia, y si la separación es lo suficientemente grande (unos pocos cm) cada circuito presentará un máximo de corriente en una frecuencia muy cercana a su frecuencia natural de resonancia. Esto se aprecia con claridad en el caso de la bobina que se empleó como secundario. También es importante

ver que para un mismo valor de  $M$  en el circuito primario se observan con mayor claridad los dos picos.

Una vez hecho esto procedimos a ajustar las curvas obtenidas mediante el modelo propuesto por las ecs. 8 y 7, para ver si los datos experimentales se ajustaban correctamente. En la Figura 7 podemos apreciar el ajuste del primario y del secundario cuando las bobinas se encuentran juntas.



**Figura 7.** Datos experimentales y ajustes correspondientes a los circuitos primario y secundario cuando las bobinas están juntas.

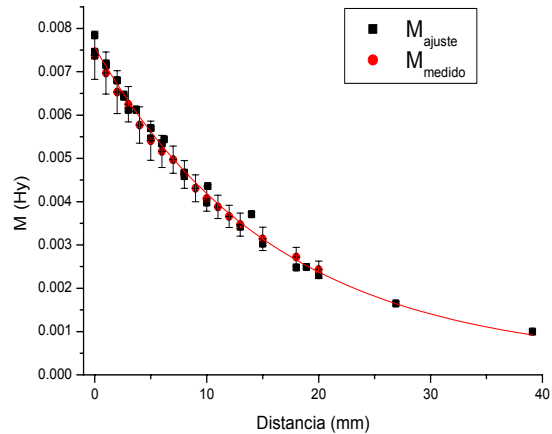
Como podemos ver, el modelo teórico es adecuado para describir el fenómeno que tiene lugar en los circuitos RLC. Al efectuar el ajuste pudimos obtener los parámetros que caracterizan cada circuito (resistencia, capacidad e inductancia) y los contrastamos con los medidos. Encontramos que dichos parámetros se conciben con los hallados mediante medición directa, como puede apreciarse en la Tabla 1.

	Medido	Ajuste
$R_1$	83.2 $\Omega$	90 $\Omega$
$R_2$	25.6 $\Omega$	31.3 $\Omega$
$L_1$	0.0324 Hy	0.0323 Hy
$L_2$	0.0335 Hy	0.0337 Hy
$C_1$	0.0991 $\mu\text{F}$	0.0991 $\mu\text{F}$
$C_2$	0.1079 $\mu\text{F}$	0.108 $\mu\text{F}$

**Tabla 1.** Valores de los parámetros de los circuitos primario y secundario, obtenidos mediante el ajuste y comparación con los valores determinados por medición directa.

Asimismo encontramos un valor para el coeficiente de acoplamiento para cada distancia ( $M_{ajuste}$ ), que podemos comparar con el  $M$

medido anteriormente según el método descrito ( $M_{medido}$ ). Graficamos ambos valores de  $M$  en función de la distancia, como puede apreciarse en la Figura 8. Para determinar el error de  $M_{ajuste}$  variamos el parámetro dejando fijos todos los demás y tomamos como error la diferencia a partir de la cual la curva teórica se desvía de los datos experimentales.



**Figura 8.** Comparación entre  $M_{medido}$  y  $M_{ajuste}$ .

Aquí vemos que los valores hallados por ambos métodos se superponen y son coherentes unos con otros. A partir de este gráfico podemos proponer que  $M$  decae con la distancia en forma exponencial. Si efectuamos un ajuste de los datos, obtenemos

$$M(d) = M_0 e^{-\frac{d}{D}}$$

donde  $d$  es la distancia entre las bobinas. Del ajuste

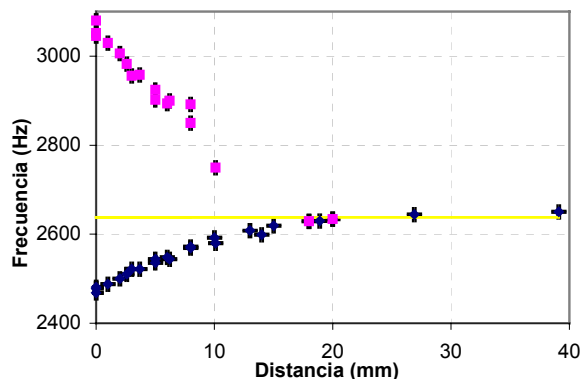
$$M_0 = (0.0073 \pm 0.0002) \text{ Hy}$$

$$D = (16.0 \pm 0.7) \text{ Hy}$$

Es importante destacar que la distancia que consideramos en realidad es la separación entre los bordes de los bobinados y no entre sus centros. Para corregir esto deberíamos añadir a cada valor, el de  $d$  ( $2.07 \pm 0.01$ ) cm. Sin embargo esto sólo provoca un corrimiento constante en el gráfico y en el ajuste, el cual no afecta la dependencia entre las magnitudes analizadas.

También obtuvimos de las curvas de amplitud registradas los valores de frecuencia para los cuales se producían máximos de corriente en el secundario, que puede verse en la Figura 9. A partir del modelo propuesto esperamos que las frecuencias se acerquen entre sí a medida que aumenta la distancia

entre las bobinas, hasta que sólo pueda verse un máximo (acoplamiento despreciable).



**Figura 9.** Frecuencias donde se producen los máximos en función de la distancia. Nótese cómo las frecuencias se acercan entre sí hasta alcanzar la frecuencia fundamental del circuito (línea horizontal).

Los errores en la determinación de las frecuencias son muy pequeños (3 Hz) debido a la precisión del instrumento de medición. Del gráfico vemos cómo el pico de la derecha se produce a frecuencias cada vez menores a medida que aumenta la separación entre las bobinas (en rosa), mientras que el pico de la izquierda (en azul) se corre hacia la derecha, encontrándose ambos en la frecuencia natural del circuito (2640 Hz aproximadamente). Se observa con claridad el fenómeno de repulsión de niveles cuantificado en la ec. 1: a medida que se acercan los osciladores el acoplamiento se vuelve mayor y la repulsión se percibe perfectamente. A medida que se alejan los osciladores el acoplamiento disminuye rápidamente y a partir de los 2cm de distancia ya no podemos hablar de un oscilador con dos modos normales, sino de dos osciladores libres. Otra cosa a destacar es que a partir de los 8mm no se pudieron determinar con precisión dos máximos de corriente debido a la disminución de  $M$ . En efecto, a partir de los 20mm se observa un único pico en la corriente del secundario, correspondiente a la frecuencia natural del circuito.

## CONCLUSIONES

Lo primero que podemos concluir es que el modelo propuesto fue adecuado. Esto se observa claramente a partir de la comparación de los parámetros obtenidos a partir del ajuste y los medidos anteriormente por otros métodos. Mediante este modelo, pudimos obtener los parámetros característicos de dos circuitos RLC

acoplados y el coeficiente de acoplamiento ( $M$ ) con precisión, en función de la distancia que separaba los bobinados. Esta última relación se puede observar claramente en el gráfico de la Figura 8. Mediante un ajuste de decaimiento exponencial, se pudo obtener una función que caracterice el coeficiente de mutua inducción en función de la distancia, para las características geométricas de las bobinas empleadas.

Asimismo, mediante la función de ajuste, pudimos obtener los valores en frecuencia de los dos picos que aparecían como producto del acoplamiento entre las bobinas.

Esta separación de las frecuencias, en el sistema acoplado, resultó ser máxima cuanto mayor fue el término de acoplamiento (menor distancia) como se puede concluir a partir de la Figura 9. Como corolario de este gráfico, podemos ver una clara analogía con la repulsión de niveles cuántica. Entonces, como era esperado a partir del modelo propuesto, los valores de frecuencias tienden a ser uno solo, que es el correspondiente a la frecuencia de resonancia para el sistema libre. Por lo tanto, para valores de  $M$  muy pequeños, podemos recuperar el valor de resonancia del sistema libre.

En general, podemos decir que gracias al método de medición empleado y a la precisión de los instrumentos, pudimos constatar que el modelo propuesto en la introducción fue adecuado y nos permitió obtener un análogo con la Mecánica Cuántica y la repulsión de niveles.

## APÉNDICE

Habiendo trabajado con un par de bobinas nos propusimos incorporar una tercera en el arreglo utilizado. En este apéndice presentaremos los resultados hallados en este caso. Realizar esta incorporación era un paso natural a seguir pues no reviste complicaciones en la configuración experimental; basta sumar a la varilla un circuito RLC.

En cuanto al modelo teórico, su planteo tampoco es dificultoso. Además de los parámetros propios del tercer circuito incorporado, en este caso se multiplican por 3 los parámetros de inductancias mutuas. Antes se tenía un único parámetro, ahora se tienen 3, uno por cada interacción entre pares de bobinas.

Si bien el planteo es simple, la resolución para hallar los módulos de las corrientes de cada circuito puede llegar a ser engorrosa debido a la cantidad de parámetros involucrados y el acople que hay entre las tres ecuaciones del sistema. Por otro lado, a diferencia del caso con un par, la solución de este

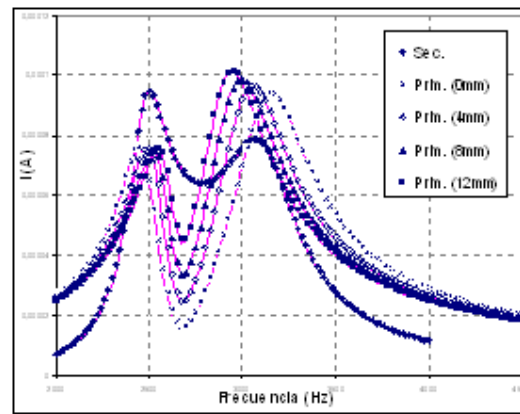


problema no se encontró en la bibliografía consultada.

Es por ello que, en lugar de resolverlo a mano, hemos utilizado un programa de matemática simbólica para resolver este caso (Maple 9). Planteando las ecuaciones y declarando apropiadamente el dominio de los distintos parámetros se puede resolver fácilmente el sistema. Adicionalmente, el programa permite la generación de código que evalúe las distintas soluciones (en particular nosotros generamos el código para evaluar en Visual Basic). Este último punto resulta importante pues transcribir las soluciones hubiera resultado imposible (las expresiones son muy complejas). En la Figura 11 se presenta el código que genera la solución para el circuito que se fuerza (primario), los cambios para hallar las otras dos soluciones son inmediatos.

Las distintas experiencias fueron similares a los casos ya vistos. Se realizaron barridos en frecuencia, durante los cuales se midió la tensión sobre una resistencia para calcular las corrientes en los distintos circuitos (primario o secundario). A su vez, se variaron las distancias entre las bobinas: distanciando todas o manteniendo un par juntas y una tercera alejada.

A continuación presentamos algunos de los resultados más significativos de estas experiencias. En la Figura 10 se presentan los datos experimentales de distintas series, incluyendo el ajuste al modelo teórico (trazo continuo que ajusta los datos); se incluyen mediciones sobre el circuito primario y mediciones sobre uno de los secundarios, también se presentan mediciones en las que se varió la distancia (los circuitos secundarios permanecieron juntos y se alejó el primario). En estos datos puede apreciarse claramente cómo aquí también los picos se juntan conforme una de las bobinas se aleja. Por otro lado, también puede verse que el ajuste teórico es satisfactorio en ambos casos (medición sobre el primario y sobre el secundario) y coherente con la caracterización de los parámetros que realizamos por otros medios.



**Figura 10:** Tres circuitos RLC. Corrientes medidas en circuito primario y un secundario. Ajuste teórico en línea continua. Las distancias corresponden a la separación entre el primario y los dos secundarios (que se mantuvieron juntos).

## REFERENCIAS

- <sup>1</sup> Atwater, H. A., "Laboratory exercises in Classical Electromagnetic Field Theory", Am. J. Phys. **36**, 672-682 (1968)
- <sup>2</sup> Frank, W. and von Brentano, P., "Classical analogy to quantum mechanical level repulsion", Am. J. Phys. **62**, 706-709 (1994)
- <sup>3</sup> Kurrelmeyer, B. y Mais, W., *Electricity and Magnetism*, Van Nostrands Company, EE.UU., 1967

```

# Paquetes con utilidades usadas.
with(codegen,optimize,makeproc):
with(CodeGeneration):
# Declaro los parámetros reales positivos.
assume( varE0 > 0 );
assume( varM12 > 0 );
assume( varM23 > 0 );
assume( varM13 > 0 );
assume( varW > 0 );
assume( varR1 > 0 );
assume( varR2 > 0 );
assume( varR3 > 0 );
# Declaro los parámetros reales.
assume( varX1, RealRange( -infinity, infinity
));
assume( varX2, RealRange( -infinity, infinity
));
assume( varX3, RealRange( -infinity, infinity
));
# Planteo el sistema y hallo su solución (3
ecuaciones para las corrientes).
sol := solve({
varE0 = solI1 * (varR1 + I * varX1) - I * varW *
varM12 * solI2 - I * varW * varM13 * solI3,
0 = solI2 * (varR2 + I * varX2) - I * varW *
varM12 * solI1 - I * varW * varM23 * solI3,
0 = solI3 * (varR3 + I * varX3) - I * varW *
varM13 * solI1 - I * varW * varM23 * solI2},
{solI1,solI2,solI3});
# Obtengo la solución sobre el forzado (solI1),
calculo su módulo y simplifico la expresión.
solI1Mod := simplify(abs(eval(solI1,sol)));
# De la fórmula del módulo genero un
procedimiento con variables intermedias (la
expresión es muy larga).
solI1Proc := optimize(makeproc(solI1Mod, [varE0,
varM12, varM23, varM13, varW, varR1, varR2,
varR3, varX1, varX2, varX3]));
# Escribo el procedimiento en VisualBasic,
declarando como flotantes los parámetros
involucrados.
VisualBasic(solI1Proc, declare=[ varE0::float,
varM12::float, varM23::float, varM13::float,
varW::float, varR1::float, varR2::float,
varR3::float, varX1::float, varX2::float,
varX3::float]);

```

**Figura 11.** Código para plantear el sistema de 3 RLC acoplados y hallar la corriente del primario.