

Estudio de un circuito RL paralelo

Elizabeth Aballay
elizabethaballay@hotmail.com

Eduardo Avilés
dagored@sion.com

Laboratorio de Física II - 2° Año - Universidad Favaloro – diciembre 2002

Resumen

En este trabajo se estudia un circuito resistencia - inductor serie, y particularmente la tensión inducida en el inductor cuando al circuito se le quita la alimentación abruptamente. Se contrasta la constante de tiempo del circuito y el modelo teórico propuesto para el mismo con datos experimentales.

Introducción

El circuito en estudio, se denomina R-L, debido a que esta formado por resistencias y un inductor. El comportamiento del inductor en un circuito dificulta que se presenten cambios rápidos en la corriente, debido a los efectos de la fem autoinducida.

La caída de voltaje en un inductor es:

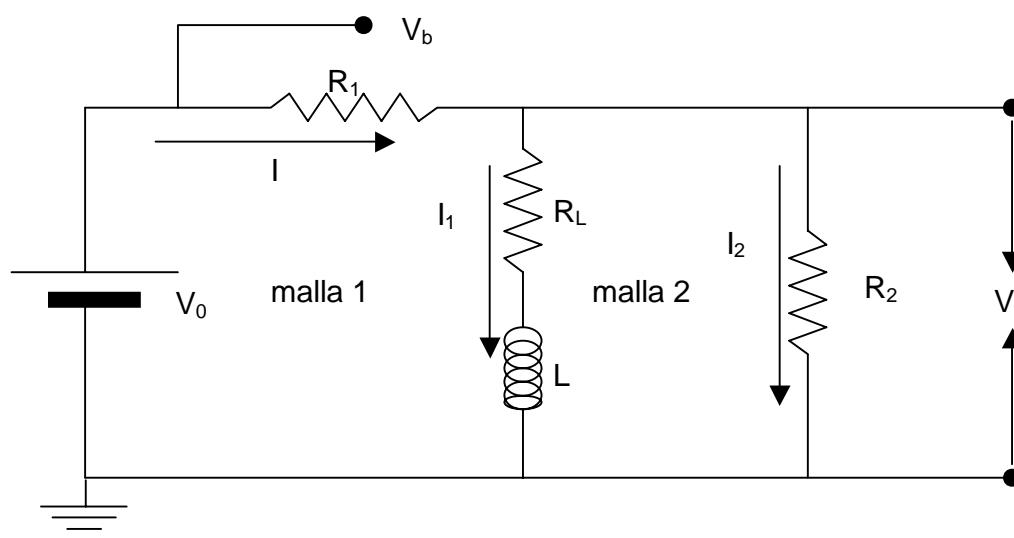
$$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (1)$$

La misma muestra que cuanto mayor sea la razón de cambio de corriente di/dt , mayor será la diferencia de potencial entre los terminales del inductor.

Los resistores en el circuito tienen la función de disipar la energía del mismo en forma de calor. La caída de voltaje en un resistor es:

$$V_R(t) = R \cdot i(t) \quad (2)$$

Estas ecuaciones junto con las reglas de Kirchoff, dan los principios para analizar el circuito en estudio.



Utilizando las reglas de Kirchoff, vemos la caída de potencial en las mallas, como sigue.

Malla 1:

$$V_0 = V_L + V_{R_L} + V_{R_1}$$

Utilizando las ecuaciones (1) y (2):

$$V_0 = L \frac{di_1}{dt} + R_L i_1 + R_1 i$$

Como $i = i_1 + i_2$:

$$V_0 = L \left(\frac{di}{dt} - \frac{di_2}{dt} \right) + R_L (i - i_2) + R_1 i$$

Malla 2:

$$V_0 = V_{R_2} + V_{R_1}$$

Utilizando la ecuación (2):

$$V_0 = R_2 i_2 + R_1 i$$

Si realizamos el cambio de variable $i=x$, $i_2=y$, y luego reemplazamos en las ecuaciones obtenidas al analizar ambas mallas, obtenemos:

$$\begin{cases} V_0 = L \dot{x} - L \dot{y} + R_L x - R_L y + R_1 x \\ V_0 = R_2 y + R_1 x \end{cases} \quad (3)$$

De la 2ª ecuación, despejamos y :

$$y = -\frac{R_1}{R_2} x + \frac{V_0}{R_2} \Rightarrow \dot{y} = -\frac{R_1}{R_2} \dot{x} \quad (4)$$

Entonces, de esta forma, la primera ecuación (3) (ecuación diferencial) queda:

$$\begin{aligned} V_0 &= L \dot{x} + L \frac{R_1}{R_2} \dot{x} + R_L x + R_L \frac{R_1}{R_2} x - R_L \frac{V_0}{R_2} + R_1 x \\ V_0 &= R_1 x + V_0 + R_1 x \end{aligned}$$

Iguualamos las ecuaciones (3):

$$V_0 = L \dot{x} + L \frac{R_1}{R_2} \dot{x} + R_L x + R_L \frac{R_1}{R_2} x - R_L \frac{V_0}{R_2} + R_1 x$$

De esta forma, al resolver la ecuación diferencial, se obtiene:

$$\begin{aligned} x = i(t) &= \frac{R_2 V_0 + R_L V_0}{R_2 R_L + R_1 R_L + R_2 R_1} + A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ \tau &= \frac{L(R_1 + R_2)}{R_2 R_L + R_1 R_L + R_2 R_1} \end{aligned} \quad (5)$$

De la ecuación (4) obtenemos el valor de y :

$$y = i_2(t) = \frac{R_L V_0}{R_2 R_L + R_1 R_L + R_2 R_1} - \frac{R_1}{R_2} A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (6)$$

De estas ecuaciones hallamos el valor de la corriente que pasa por el inductor:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= i(t) - i_2(t) \\ i_1(t) &= \frac{R_2 V_0}{R_2 R_L + R_1 R_L + R_1 R_2} + A \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

Hallamos el valor de **A**, con la condición inicial $i_1(t = 0) = 0$:

$$i_1(0) = \frac{R_2 V_0}{R_2 R_L + R_1 R_L + R_2 R_1} + \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) A = 0 \quad (8)$$

De esta ecuación hallamos el valor de **A** y lo reemplazamos en la fórmula (8):

$$A = \frac{-R_2^2 V_0}{(R_1 + R_2)(R_2 R_L + R_1 R_L + R_2 R_1)}$$

$$i_1(t) = \frac{R_2 V_0}{R_2 R_L + R_1 R_L + R_2 R_1} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$$

Las diferencias de potencial son $V_b = V_0$ y $V_a = V_{R_2}$

Método Experimental

1) Determinación del valor de inductancia del inductor

La primera parte del experimento consistió en determinar la inductancia del inductor utilizado en el experimento. Esto se realizó con el siguiente circuito:

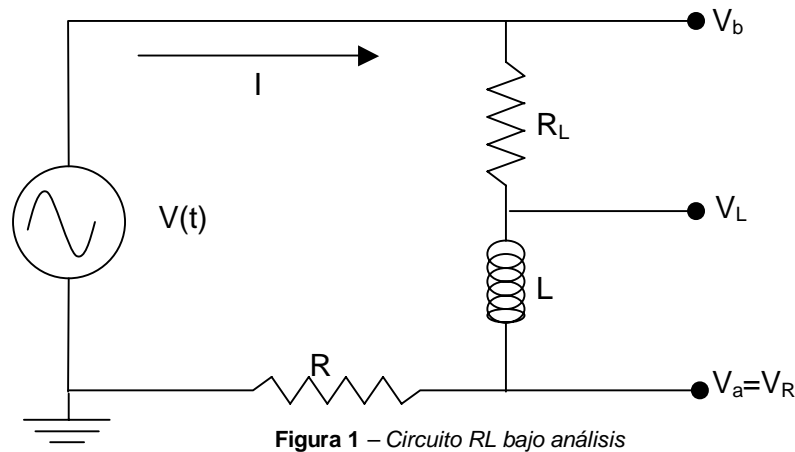


Figura 1 – Circuito RL bajo análisis

El circuito se alimentó con una señal senoidal de $33,0 \pm 0,1$ Hz de $17,4 \pm 0,1$ V pico a pico. Se utilizó el MPLI para medir las diferencias de potencial V_a y V_b . De acuerdo a las leyes de Kirchoff, obtenemos:

$$R_{TOT} = R + R_L$$

$$V_a = V_R$$

$$V_{TOT} = V_b = V_R + V_L + V_{R_L} \quad (9)$$

$$V_L = -L \frac{di}{dt} = V_b - V_a \cdot \left(\frac{R_{TOT}}{R_L} \right)$$

Luego, de acuerdo a las ecuaciones (9), y con los datos obtenidos del MPLI, se representó en un gráfico V_L en función de di/dt . De este gráfico se obtuvo un ajuste lineal de datos. La pendiente de la recta obtenida es el valor de la inductancia, **L**.

Nota: di/dt , la derivada de la corriente total en función del tiempo, se calculó “suavizando” los datos de corriente total calculados a partir de los datos obtenidos y de que $I_{TOT} = V_R / R$.

También se puede ver la diferencia de fase entre la corriente y la tensión en la bobina si se representan I_{TOT} y V_L en función de t en el mismo gráfico.

El gráfico de V_L en función de di/dt se muestra en la figura 2.

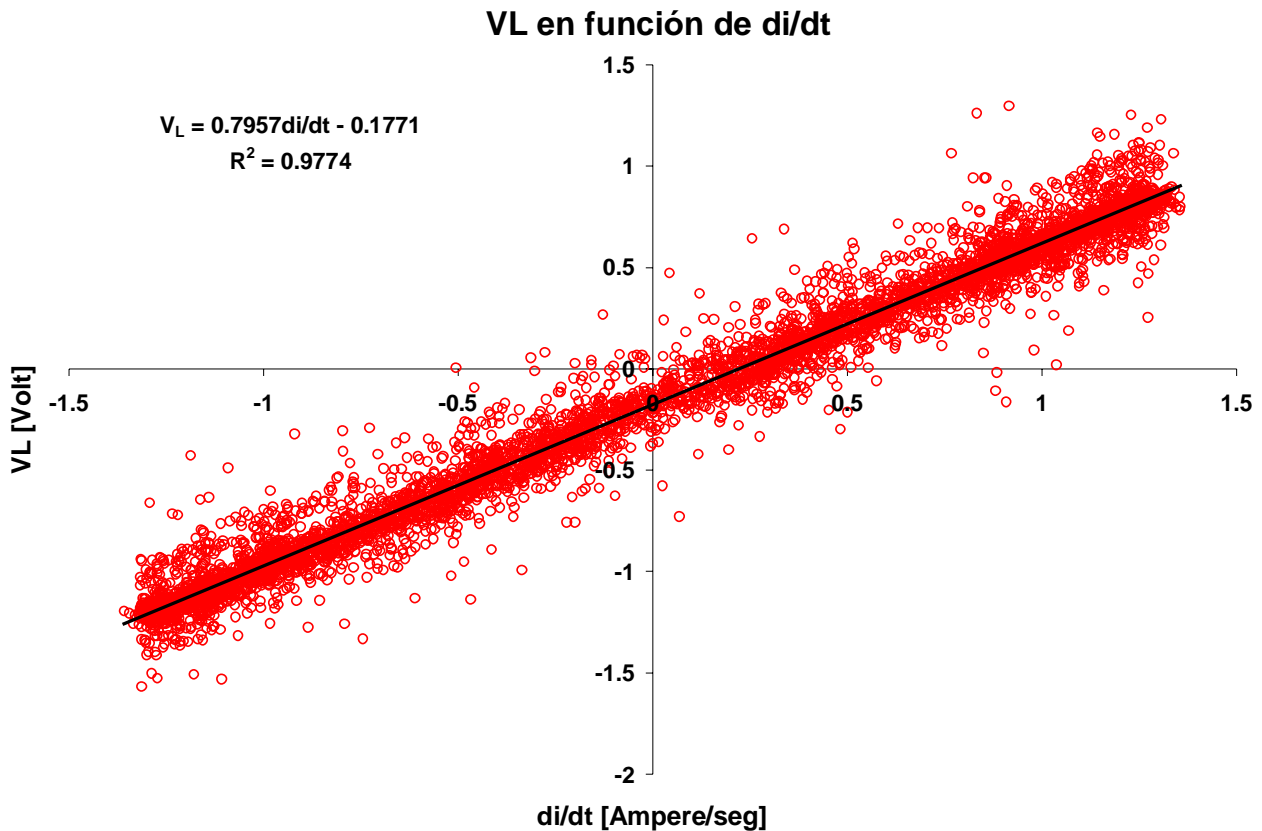


Figura 2 - Gráfico de V_L en función de di/dt , donde se aprecia un comportamiento lineal. La pendiente de la recta es la inductancia del inductor.

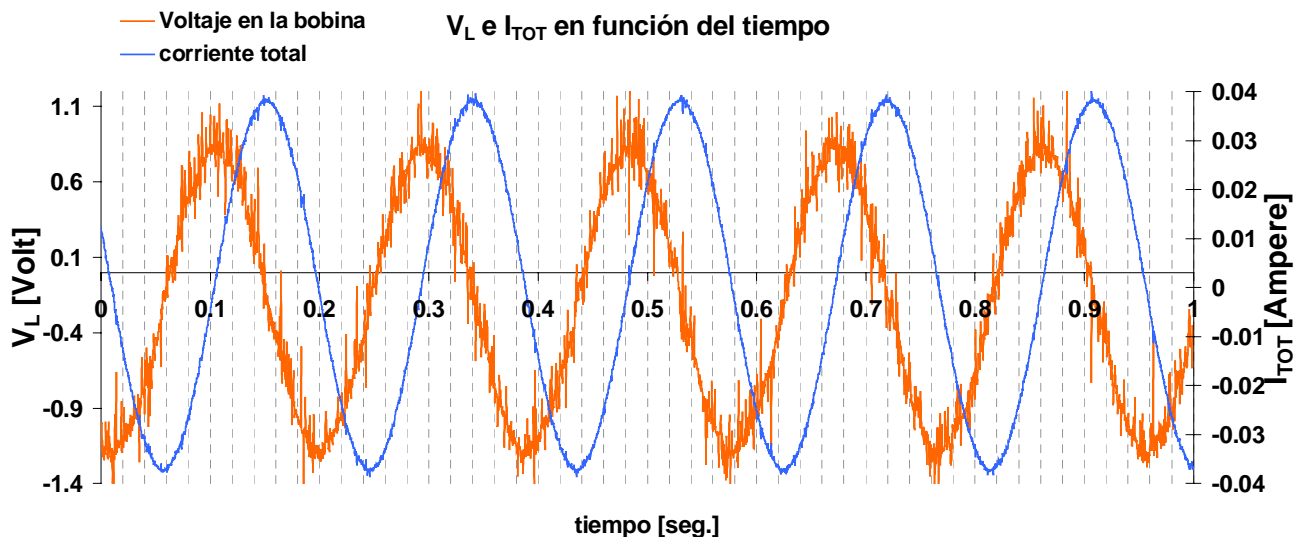


Figura 3 - Gráfico de I_{TOT} y V_L en función del tiempo. Se observa claramente un desfase de 90 grados entre tensión y corriente (la corriente adelanta al voltaje).

En la figura 3 se ilustra la relación voltaje/corriente en el inductor. Se observa claramente que existe un desfase de 90 grados entre corriente y tensión. Dado que la resistencia de la bobina es relativamente baja (201 ± 1 ohm), y la resistencia de carga también (28 ± 1 ohm), el desfase observado es muy próximo a 90 grados.

En conclusión, de la figura 2 se deduce que la inductancia del inductor es (término lineal de la recta de ajuste de datos):

$$L = 0,79 \pm 0,04 \text{Hy}$$

Con un coeficiente de correlación muy próximo a 1, se puede confiar en este valor.

Sin embargo, hay que realizar un comentario, y es que la ordenada al origen no pasa por cero. Esto no se pudo eliminar del experimento, y además realizando un análisis de regresión el mismo indica que este valor es significativo. Pero el experimento se realizó repetidas veces con distintos valores de frecuencia, voltaje de la fuente y valores de resistencia de carga, y siempre se obtuvo el mismo valor para la inductancia del inductor independientemente de los parámetros cambiados. Esto se puede tomar como una indicación positiva de que la inductancia obtenida experimentalmente es realmente la inductancia del inductor.

1) Análisis del circuito RL

La segunda parte del experimento consiste en determinar la respuesta del circuito RL cuando, estando alimentado por una fuente con $V = \text{constante}$, abruptamente se quita la alimentación al circuito. El circuito es el analizado en la parte teórica e ilustrado en la figura 1.

Se realizaron varias mediciones con el MPLI, tomando como variable a medir V_a . Los valores de los elementos del circuito son la inductancia determinada anteriormente, $L=0,79\pm 0,04\text{Hy}$, $R_1=R_2=55,7\pm 0,1\Omega$, y $R_L=201\pm 1\Omega$.

El MPLI se configuró para activarse cuando el nivel de la entrada cayera por debajo de 1V. El valor de tensión suministrado al circuito, V_b , es $V_b=V_0=1,8\pm 0,1\text{V}$. El parámetro medido con el MPLI fue V_a .

Con el V_a medido, se puede determinar la I_1 experimental, sabiendo que:

$$i_1(t) = \frac{V_a}{R_L} \tag{10}$$

Resultados

En la figura 4 se puede contrastar el modelo teórico propuesto con los datos experimentales observados.

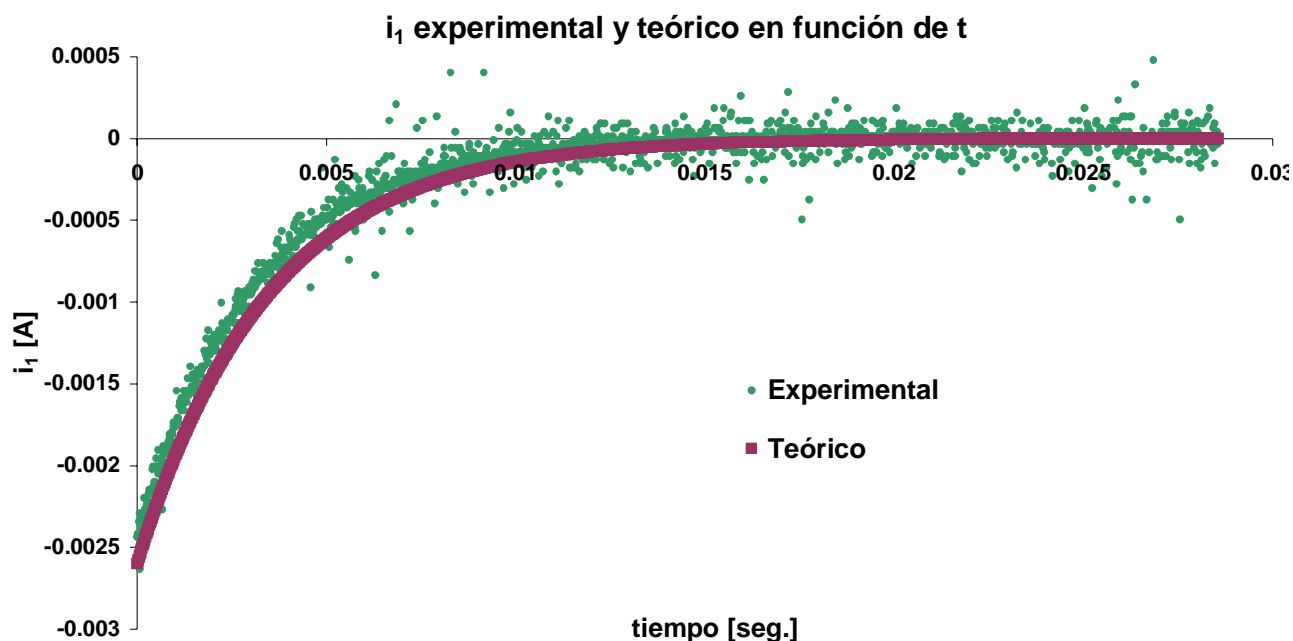


Figura 4 - Curvas Experimental y teórica para el circuito a examen

El coeficiente de correlación entre los datos observados y el modelo teórico es de 0.97, lo que implica un ajuste de datos muy bueno. El error típico es de $\pm 0.00008\text{A}$.

Para que el ajuste de los datos experimentales al modelo hubiera sido óptimo el valor de la inductancia tendría que haber sido de 0.755Hy, lo que cae dentro del error experimental en la determinación de la inductancia.

De la figura 4, también se puede extraer la constante de tiempo experimental del circuito, y compararla con la teórica dada en la fórmula (5). Esto se realiza sabiendo que:

$$\frac{1}{\tau} = \left| \frac{1}{i_1(0)} \cdot \frac{\partial i_1}{\partial t} \right|_{t=0} \tag{11}$$

El valor del τ teórico es:

$$\tau_{\text{teor}} = \frac{L(R_1 + R_2)}{R_2 R_L + R_1 R_L + R_2 R_1} = 0.0034 \Rightarrow \frac{1}{\tau_{\text{teor}}} = 289.68$$

Luego, de la figura 1 se calcula el valor de $i_1(0)$, que da:

$$i_1(0) = -0.0024 \Rightarrow \frac{1}{i_1(0)} = -416.7$$

Luego, realizando una derivación numérica en datos experimentales cerca de $t=0$ (suavizando la curva), se obtiene el valor de la derivada de $i_1(t)$ evaluada en $t=0$, que da:

$$\left. \frac{\partial i_1}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.68$$

Por último, multiplicando los dos valores anteriores, podemos obtener el τ experimental, que es:

$$\frac{1}{\tau_{\text{EXP}}} = 283.36 \Rightarrow \tau_{\text{EXP}} = 0.0035$$

El τ experimental concuerda asombrosamente con el teórico, lo que es otra prueba a favor del modelo teórico propuesto.

Conclusiones

Del análisis de los datos obtenidos por medio del experimento, podemos concluir que el modelo teórico propuesto para el circuito en estudio se adapta admirablemente bien a los datos experimentales. Se pudieron comprobar varios puntos:

- En la fase de determinación del valor de inductancia del inductor, se comprobó la relación lineal entre el voltaje en el inductor y la variación de corriente con respecto del tiempo (fórmula 1).
- En la misma fase del experimento que la citada anteriormente, también se comprobó que la pendiente de la recta que vincula los valores citados en el punto previo es efectivamente el valor de inductancia del inductor.
- Se verificó la corrección del modelo teórico propuesto para el experimento por medio del valor de tensión medida.
- Se verificó que la constante de tiempo del circuito es efectivamente la dictada por el modelo, corroborando que este último es acertado.

Bibliografía

1. Gil, S. y Rodríguez E., *Física re-Creativa*, 1ª. Ed.- Buenos Aires: Prentice Hall, 2001.
2. Sears, F. *Et al*, *Física Universitaria Vol.2*, 9ª. Ed.- México: Addison Wesley Longman, 1999.
3. Nagle, R. Kent. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, 3ª. Ed.- México: Pearson Educación, 2001.
4. Pueyo, M. *Análisis de modelos circuitales Vol.1 y 2*.- Buenos Aires: EUDEBA, 1985.