

“Band Gap” en la transmisión por cables a radiofrecuencias

Alan Garbar y Sebastián Fortín
Merengue84@hotmail.com y sefx@gmx.net
Laboratorio 5 –FCEyN – UBA -2005

Resumen: se estudió la transmisión de una línea de transmisión de cables coaxiales en función de la frecuencia. Se pudieron ver los band gaps en las primeras frecuencias usando un barrido manual de frecuencia y también con un barrido automático, rectificando la señal con un circuito rectificador apropiado. Además, con un generador de ondas de 15 MHz se logró ver un band gap en 18 MHz utilizando los armónicos de la onda cuadrada y compararlo con el visto usando un generador de 30MHz.

INTRODUCCIÓN

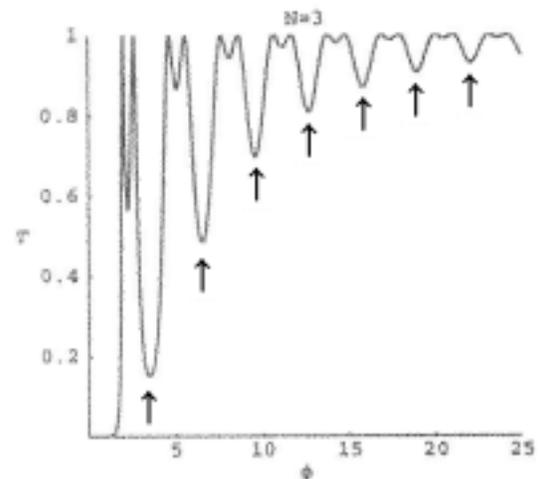
En la física elemental, se suelen estudiar dos tipos de ondas: las que se propagan y las estacionarias. Las primeras pueden ser de cualquier frecuencia mientras que las segundas pueden tomar solo unos determinados valores discretos de frecuencia. Pero existe un tercer tipo, cuyas frecuencias posibles entran en rangos continuos separados por bandas prohibidas de frecuencia (band gaps). Esto ocurre cuando el medio de propagación de la onda tiene condiciones de contorno periódicas. Este es justamente el caso de los sólidos, y la teoría de band gaps los describe más que satisfactoriamente. Sin embargo, no solo para el caso de sólidos se puede ver este fenómeno, de hecho, se lo puede ver en cualquier sistema que sea localmente periódico. Por ejemplo es visible en ondas mecánicas, acústicas y electromagnéticas, mientras que se propaguen en medios que en cierto lugar tengan una periodicidad característica. La diferencia crucial entre el caso de los sólidos y los demás, es que en el primer caso las condiciones de contorno son infinitamente periódicas, mientras que en los otros, las condiciones de contorno son periódicas en un sector finito del sistema, o sea, localmente periódicas.

En este trabajo nos propusimos ver el efecto de band gaps usando ondas electromagnéticas. Para obtener un sistema periódico, se construyó una línea de transmisión con dos tipos de cables distintos: H, de 75Ω , y L de 50Ω , los cuales eran distribuidos alternadamente. Como casi todos los equipos de laboratorio funcionan con 50Ω , es necesarios que se conecten usando cables L, por lo tanto las guías de ondas usadas eran de la forma $L^N(HL)^NHL$. Entonces N marca la periodicidad del sistema, L son cables cuya única característica relevante es que son de 50Ω y por lo tanto se los puede conectar a los equipos receptor y fuente y el H ubicado luego de la serie periódica

tiene como funcionalidad separar a esta serie del último de L de modo de tener una condición de contorno más y magnificar el efecto de band gap. Cuando N tiende a infinito, el sistema es perfectamente, tal es el caso de la teoría cuántica de Bloch para un sólido. Como en nuestro trabajo N tiene valores finitos (3 el mayor N), el enfoque debe ser cambiado.

SISTEMAS PERIÓDICOS ANÁLOGOS

Basándose en el trabajo de Griffiths y Steinke¹, se puede resolver exactamente el problema usando primero la analogía de la mecánica cuántica con N escalones rectangulares de potencial, los cuales son el análogo matemático (según los autores) del cambio de impedancias en una línea de transmisión de ondas electromagnéticas. El resultado de este análisis¹ se muestra en la figura 1:



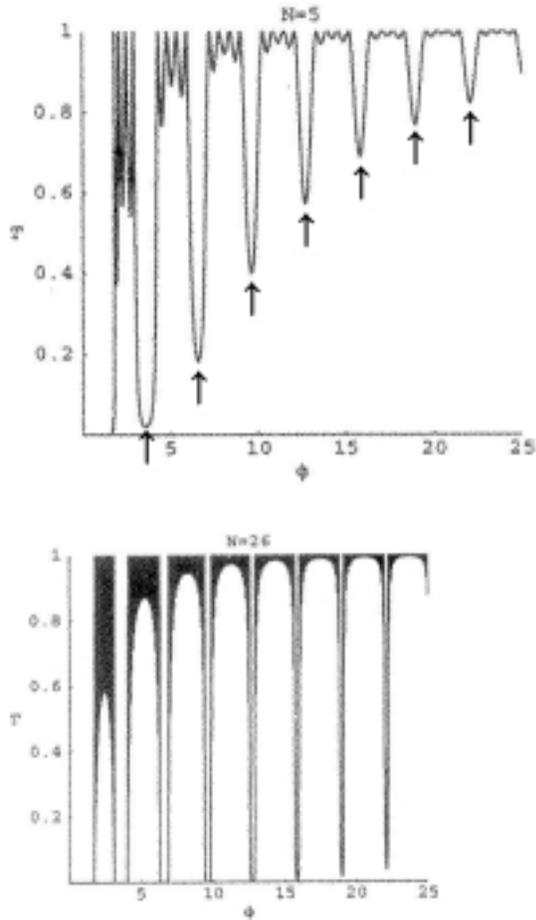


Figura 1: gráficos de la transmisión en función de una variable (Φ) proporcional a la frecuencia para distintos N . Las flechas indican las frecuencias prohibidas.

Estos gráficos contienen buena información cualitativa. En primer lugar se ve que las caídas importantes de transmisión están equiespaciadas. En segundo lugar se ve claramente que al aumentar N de 3 a 5 las caídas de transmisión son más importantes y por lo tanto más visibles experimentalmente, además aparecen más oscilaciones entre mínimo y mínimo, similar a una red de difracción. Por último, al aumentar N hasta 26, se ve que se forman los rangos continuos permitidos para las frecuencias, de los cuales se comentaba anteriormente en el caso del sólido. No se puede obtener información de estos gráficos acerca de cómo debe ser el sistema para obtener band gaps a determinadas frecuencias. Para eso habría que adentrarse en las ecuaciones del trabajo de Griffiths y Steinke, las cuales son muy complicadas e innecesarias para nuestro propósito, tal como se verá a continuación.

El diseño de la guía de transmisión iba a depender de las frecuencias prohibidas que se quisieran medir. Para analizar la relación entre éstas frecuencias y el montaje, se hizo la siguiente analogía: cada cable representa una lámina dieléctrica de distinto índice de refracción. A continuación se ve un esquema de la disposición de las láminas, en la figura 2:

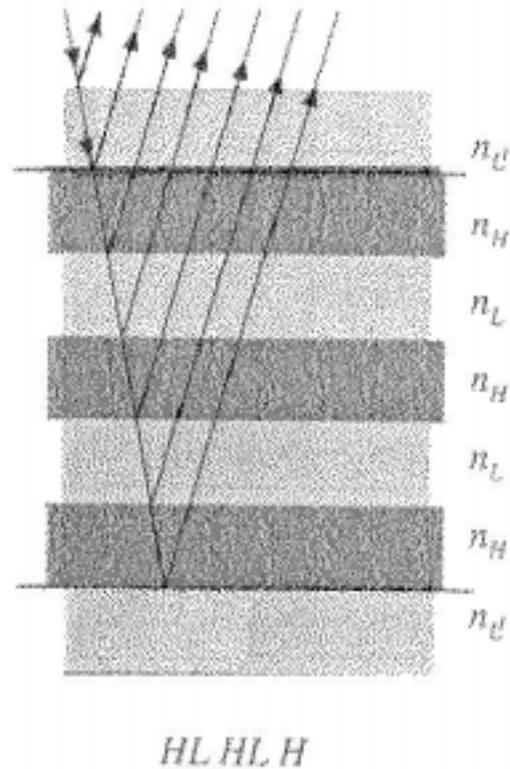


Figura 2: esquema de la disposición de las láminas como analogía a la guía de ondas de cable coaxial ($N = 2$). Se eliminó la refracción por razones de simplicidad.

Un análisis detallado² de esto lleva a que el sistema se simplifica cuando el largo de HL corresponde a la mitad de la primera longitud de onda prohibida, y por lo tanto:

$$f = m \frac{v}{2d} \quad (1)$$

Donde m es un número entero, v es la velocidad de propagación y d la distancia del sistema HL. Así se confirma que las frecuencias prohibidas están equiespaciadas, tal como se vio en la Figura 1. Esto puede ser entendido usando un simple modelo de interferencia con una lámina. Para obtener un desfazaje en π en la transmisión se suelen usar láminas de media onda, es decir, láminas cuya longitud es de la mitad de la

longitud de onda. Si se la hace interferir con una onda no desfasada entonces se obtendrá un mínimo en la transmisión. Entonces:

$$d = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow d = \frac{v}{2f} \quad (2)$$

Despejando la frecuencia de esta igualdad se obtiene la primera frecuencia de la ecuación (1). La velocidad de propagación en un cable coaxial se puede obtener mediante las siguientes relaciones³:

$$v = \sqrt{\frac{1}{L C}} \quad (3)$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (4)$$

Donde L y C son la inductancia y capacidad por unidad de longitud, b y a los radios externos e internos del cable respectivamente. La velocidad que figura en la ecuación (1) puede ser tomada como la velocidad promedio ponderada entre las velocidades de H y L si estas son distintas, donde la ponderación se basa en sus respectivas longitudes.

Cabe aclarar que si experimentalmente no se satisface que la longitud de onda sea el doble que d, entonces la ecuación (1) deja de valer en forma exacta y se esperaría ver pequeños corrimientos de las frecuencias predichas.

El paso de la serie de láminas a la serie de cables coaxiales se da entre el coeficiente de reflexión entre dos láminas dieléctricas con distinto índice de refracción (n) y el coeficiente de reflexión entre dos cables con distinta impedancia (Z), de manera muy simple:

$$R_{12} \equiv \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \equiv \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (5)$$

Es importante mencionar que se está suponiendo que el medio es no dispersivo, es decir que el índice de refracción no depende de la frecuencia. Para obtener una expresión de la transmisión en función de la frecuencia se puede usar la matriz de transmisión de una lámina dieléctrica², y multiplicarla por todas las matrices correspondientes a cada lámina en el sistema, así obteniéndose una matriz característica de la serie de láminas y a partir de ésta obtener el coeficiente

de transmisión. Se deja esto para que el lector interesado lo estudie.

Un modelo muy simple es presentado en el apéndice A.

EXPERIMENTO

Se utilizaron para la realización de esta experiencia tramos de cable coaxial que actuaron como guía de onda. Se intercalaron tramos de cable con distinta impedancia a los cuales se las denominó H y L, los tramos H eran cables RG-59 (75Ω) con 15m de largo, los tramos L eran cables RG-58C/U (50Ω) con 1m de largo, las características de ambos modelos de cable se encuentran disponibles en la hoja de datos que publica el fabricante (ver anexo A).

- Velocidad de propagación.

Para medir la velocidad de propagación en los cables se inyectó una señal cuadrada en un extremo del tramo dejando el otro libre. La disposición se muestra en la Figura 3:

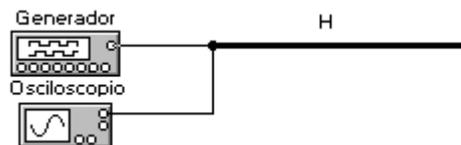


Figura 3: Arreglo experimental para medir la velocidad de propagación en un cable H.

Al no estar terminado el cable la señal llega al extremo y rebota, entonces se midió en el osciloscopio la superposición de la onda incidente y la reflejada, es decir, dos ondas cuadradas desfasadas. La forma de la superposición se muestra en la Figura 4. El desfase τ pudo medirse en el osciloscopio mediante los cursores.

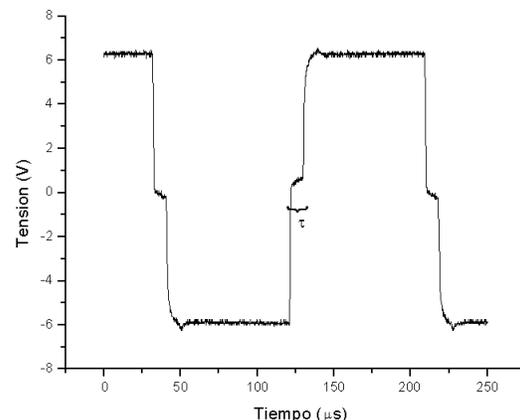


Figura 4: Superposición de dos señales cuadradas desfasadas medidas. Se señala el tiempo τ que es el tiempo que tardó la señal en ir y volver.

Teniendo el tiempo τ y la distancia d (medida con una cinta métrica) se calculó la velocidad en el cable usando:

$$d = v \cdot t = v \frac{\tau}{2}$$

Esta velocidad de propagación se comparó con la que se calculó tal como se comentó en la introducción, usando la ecuación (3) y los datos de los cables que figuran en el anexo A.

- Transmisión de una red periódica.

Método I: Medición directa

Se procedió a conectar las configuraciones $(HL)^N H$, con $N = 0, 1, 2, 3$. Para medir la transferencia se inyectó una señal senoidal con un generador de onda en un extremo y como muestra la Figura 5 se midió la amplitud de la onda en el otro extremo del conjunto con un osciloscopio.

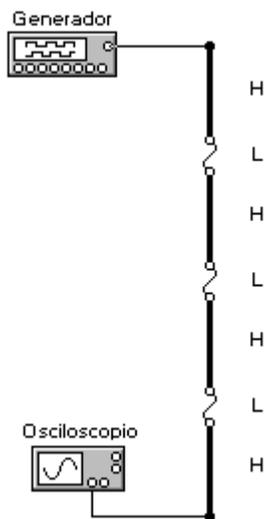


Figura 5: Se muestra la disposición de cables e instrumentos en la configuración $(HL)^3 H$ para el Método I.

Se registró la amplitud de la señal en función de la frecuencia en todo el rango disponible del generador (0MHz – 15MHz) a intervalos de 0.25MHz, donde se observaron las depresiones de amplitud predichas por la teoría.

Método II: Medición indirecta

Para abarcar mayores frecuencias en el gráfico de la transferencia se empleó un método más indirecto: se configuró al generador para que

entregara una señal cuadrada cuya frecuencia se varió de 5MHz a 9MHz. La serie de Fourier de esta señal cuadrada de frecuencia f_0 tiene sus componentes en $f_0, 3f_0, 5f_0, 7f_0...$ etc. pero su amplitud cae rápidamente. Para medir entonces la transferencia del sistema en el rango 15MHz-30MHz se utilizó un osciloscopio que muestra la FFT de la señal que se le ingresa y se midió la amplitud de la componente f_0 y $3f_0$ en función de la frecuencia f_0 . Primero se comprobó que la componente principal y el primer armónico de la FFT reprodujeran el gráfico realizado anteriormente en rangos disponibles por el generador. Luego con la amplitud del primer armónico se extendió el gráfico hasta los 30MHz.

Método III: Medición automática

Para mejorar la calidad de la medición y comparar con los métodos anteriores se usó conseguir un generador que llegara hasta los 30MHz y se lo configuró para que entregara una señal senoidal de amplitud constante cuya frecuencia cambiara linealmente en un tiempo de 200s desde 2MHz a 30MHz. A la salida del conjunto se conectó un rectificador de media onda cuyo circuito se muestra en la figura 6:

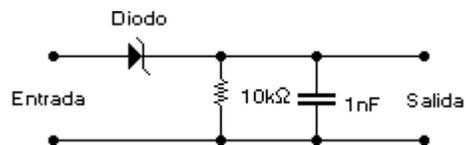


Figura 6: Circuito del rectificador construido.

En donde el diodo deja pasar solo el semiciclo positivo y la caída de tensión se mide sobre una resistencia. La función del capacitor fue suavizar la salida, como se muestra en la Figura 7, de manera de asemejarla a una tensión continua que fuera proporcional a la amplitud de la onda de entrada.

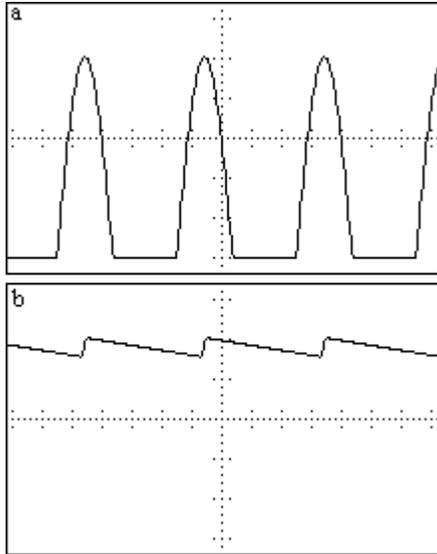


Figura 7: Se muestra la salida del rectificador en un osciloscopio sin el capacitor (a) y con el capacitor (b). Estos gráficos representan el comportamiento del circuito con una resistencia de $1K\Omega$, posteriormente se reemplazó por una de $10K\Omega$ en donde no se podía notar el riple.

Se eligieron los componentes del circuito de manera que entregara una tensión lo más continua posible pero que reflejara las variaciones cuando la amplitud y la frecuencia de la señal de entrada estuvieran cambiando, entonces se eligió la constante de tiempo $RC \approx 10^{-6}s$ que es más grande que el periodo de la señal en el rango $2MHz - 30MHz$ y responde a cambios rápidos en la señal. La salida del rectificador se conectó a una placa de adquisición de datos. De esta forma se registró un valor de tensión proporcional a la amplitud de la onda en función del tiempo. Para relacionar el tiempo medido con la frecuencia se utilizó la salida de sincronismo del generador, la cual se mantiene en $5V$ y entrega un pulso de $0V$ en el momento que comienza la rampa de frecuencias. Este sincronismo se ingresó a la placa de adquisición y se la configuró para que comenzara la medición al detectar el pulso de sincronismo. El diagrama de conexión puede observarse en la Figura 8:

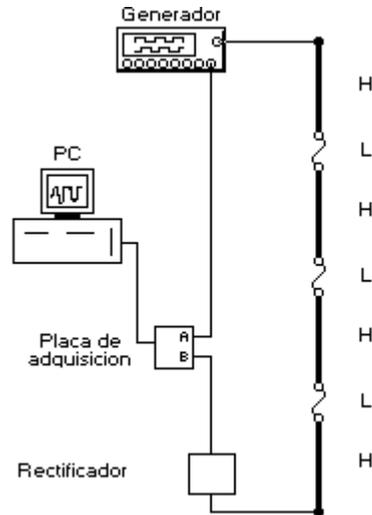


Figura 8: Disposición de los instrumentos en la medición refinada de la transferencia en la configuración $(HL)^3H$.

Se realizó la medición para $N=0, 2$ y 3 .

- Atenuación de los cables.

Todos los gráficos obtenidos con los distintos métodos muestran dos efectos, el primero y más común es la atenuación de la señal que crece con la frecuencia, el otro es la superposición de los distintos rebotes que causan los "gaps". Para independizarse del primero y observar el segundo en todo su esplendor debió calcular la atenuación de la línea en función de la frecuencia utilizando el modelo de impedancias en serie y capacitores en paralelo. Usando que para un cable coaxial³:

$$Z = \frac{j\omega L}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{\omega^2 LC}} \right) \quad (6)$$

Ya teniendo L y reemplazándolo en (6) se calculó la respuesta de la línea en función de la frecuencia debida al cambio de impedancia, la cual se muestra en la Figura (9):

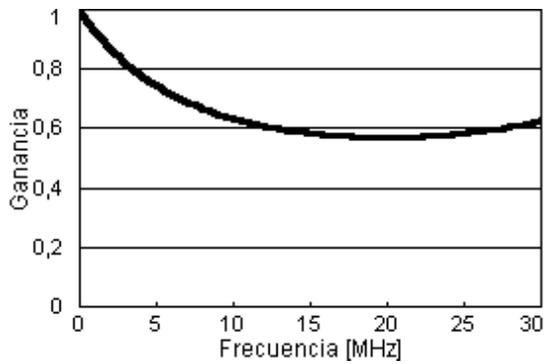


Figura 9: Respuesta en frecuencia de los cables debido al cambio de impedancia.

Utilizando esto último se corrigieron los gráficos anteriores de manera que quedara visible solo el efecto de interferencia. Para ello a cada valor de tensión se lo dividió por la ganancia correspondiente a la frecuencia de la señal.

RESULTADO Y ANÁLISIS

El valor del desfase hallado en la medición de la velocidad de propagación de la señal es (para H):

$$\tau = (300 \pm 5) \times 10^{-9} \text{ s}$$

La velocidad de propagación del cable H hallada es:

$$v = (200 \pm 5) \times 10^6 \text{ m/s}$$

El valor calculado con los valores de la hoja de datos es:

$$v = (197 \pm 1) \times 10^6 \text{ m/s}$$

El valor hallado coincide con el calculado con los datos dados por el fabricante dentro del error experimental, por lo que confirmamos que el valor de L calculado es correcto y la atenuación de los cables hallada es adecuada para corregir los gráficos de transferencia. El valor de la velocidad de propagación de L tuvo la misma concordancia entre el valor medido y el calculado con los datos, pero no aporta al informe incluirlo.

Todos los gráficos que se presentan de aquí en más se encuentran normalizados e incluyen la corrección por atenuación debido al cambio de la impedancia con la frecuencia.

La transferencia obtenida con el Método I cambiando la frecuencia en forma manual dio como resultado el gráfico que se muestra en la Figura 10:

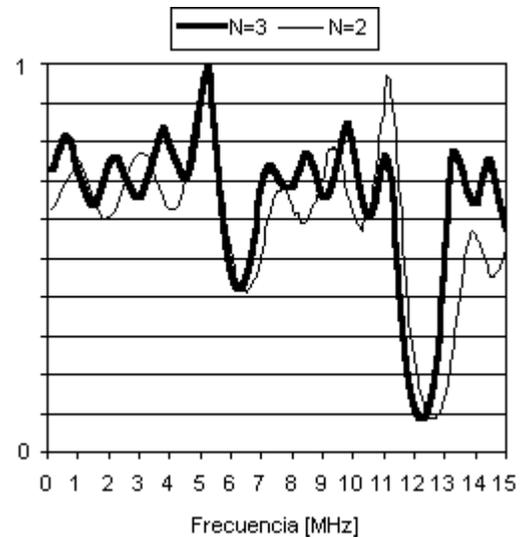


Figura 10. Transferencia obtenida con el Método I para las configuraciones $(HL)^3H$ y $(HL)^2H$.

La ampliación del gráfico con el Método II en el rango 5MHz – 9MHz se realizó para N=3 y dio como resultado el gráfico de la Figura 11, en donde se lo compara con el mismo intervalo de la Figura 10:

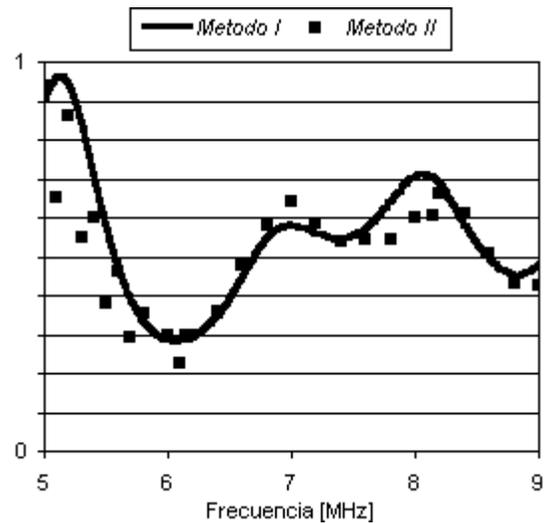


Figura 11: Transferencia obtenida con el Método II comparada con la obtenida con el Método I para la configuración $(HL)^3H$.

En el cual se observa que el método es adecuado y puede extenderse a frecuencias mas altas, lo cual se hizo y se consiguió el gráfico de la Figura 12:

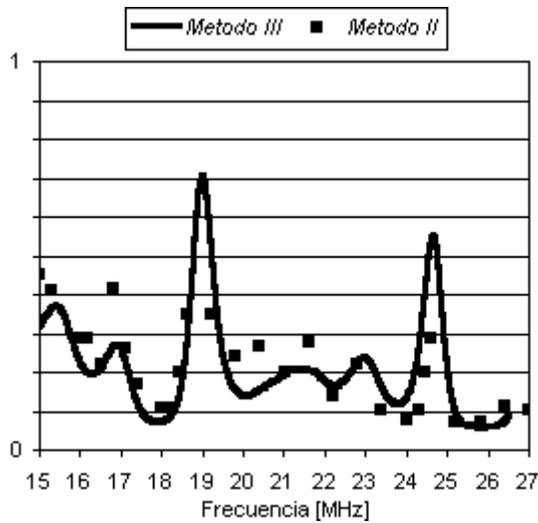


Figura 12: Transferencia obtenida con el Método II comparada con la obtenida con el Método III en ese rango de frecuencias para la configuración $(HL)^3H$.

En este rango de frecuencias la coincidencia no es tan buena como antes respecto a la amplitud pero el método permitió determinar la posición de los máximos y mínimos en el rango de los 15MHz–30MHz con un generador que solo alcanza los 15MHz.

Para estimar la validez del Método III se comparo en la Figura 13 y 14 el resultado con el del Método I en el mismo rango de frecuencias.

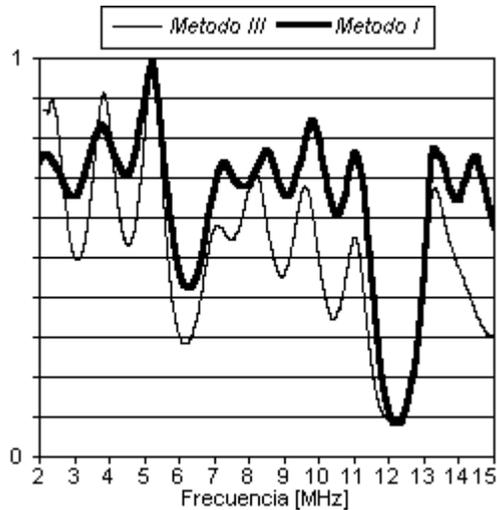


Figura 13: Transferencia obtenida con el Método II comparada con la obtenida con el Método III en ese rango de frecuencias para la configuración $(HL)^3H$.

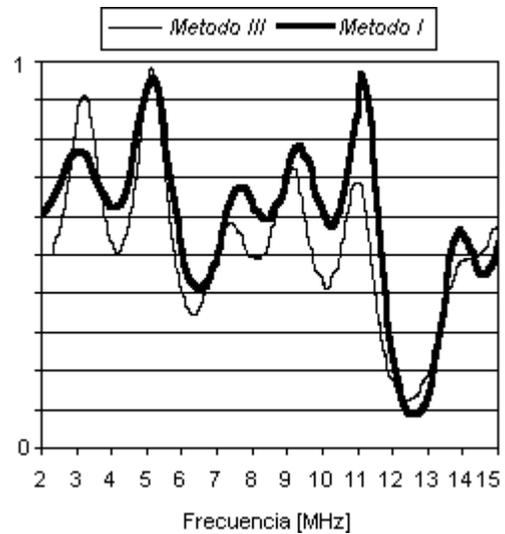


Figura 14: Transferencia obtenida con el Método II comparada con la obtenida con el Método III en ese rango de frecuencias para la configuración $(HL)^2H$.

En las Figuras 13 y 14 se observa que el método es adecuado y puede extenderse a frecuencias mas altas, lo cual se hizo y dio como resultados los gráficos de las Figuras 15,16 y 17 para $N = 3, 2$ y 1 respectivamente en donde se indican con línea punteada los mínimos de transmisión y con asteriscos los mínimos secundarios predichos por el modelo del apéndice:

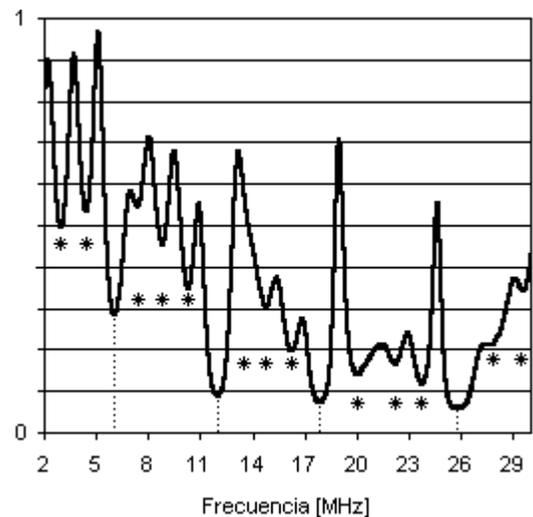


Figura 15: Transferencia obtenida con el Método III para la configuración $(HL)^3H$.

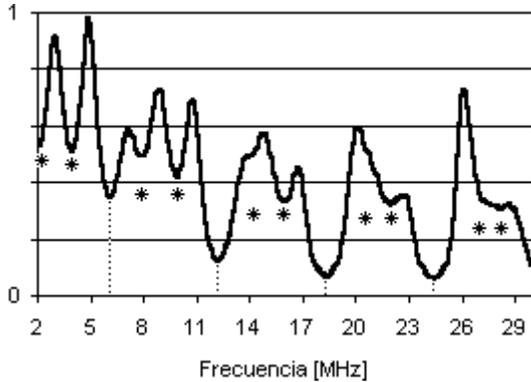


Figura 16: Transferencia obtenida con el Método III para la configuración $(HL)^2H$.

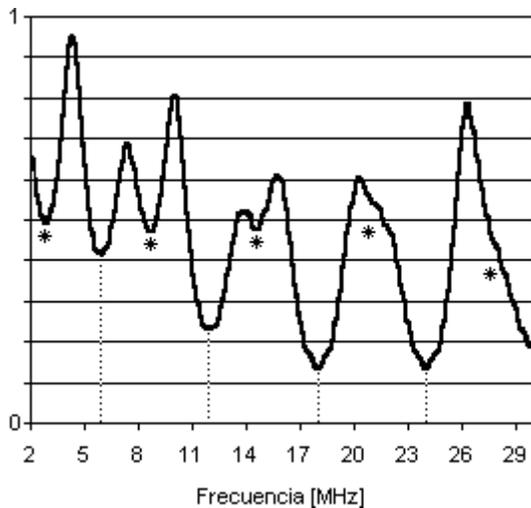


Figura 17: Transferencia obtenida con el Método III para la configuración $(HL)^4H$.

Las frecuencias prohibidas observadas fueron halladas ajustando la forma del mínimo por una gaussiana y son: $6.25 \pm 0.1 \text{ MHz}$, $12.29 \pm 0.2 \text{ MHz}$, $18.42 \pm 0.4 \text{ MHz}$, $24.55 \pm 0.5 \text{ MHz}$ que coinciden con las frecuencias teóricas (ecuación (1)) dentro del error considerado.

CONCLUSIONES

Se pudieron observar las características principales de una estructura periódica formada por cables coaxiales. Se midieron las frecuencias prohibidas y coincidieron con las predichas por la teoría dentro del error experimental.

Se midió la velocidad de propagación para confirmar la inductancia característica del cable calculada y con ella hallar la atenuación debida a los cables y corregir los gráficos de transferencia.

Se pudieron obtener gráficos de la transmisión en función de la frecuencia con varios métodos, los cuales al ser comparados unos con otros mostraron ser coherentes.

Se pudo construir un circuito rectificador para altas frecuencias, lo que permitió el barrido automático, el cual mostró ser una herramienta muy útil ya que ahorra mucho tiempo de medición.

Se logró extender el rango de utilidad del generador de funciones al triple de su frecuencia máxima usando una señal cuadrada y observando el primer armónico.

REFERENCIAS

- [1] "Waves in locally periodic media", David J. Griffiths – Carl A. Steinke, American Association of Physics Teachers. Enero de 2000.
- [2] "Óptica", Hecht E., Addison Wesley 2000.
- [3] "Teoría y problemas de líneas de transmisión", Chipman Robert A., Panamá: McGraw-Hill, 1971.
- [4] "Coaxial cable analogs of multilayer dielectric optical coatings", María del Mar Sánchez-López – Jeffrey A. Davis – Karlton Crabtree, Am. J. Phys. **71**, 1341 (2003).

APÉNDICE A

Se supone tener una línea de transmisión de N puntos donde se producen reflexiones, como se muestra en la siguiente figura:

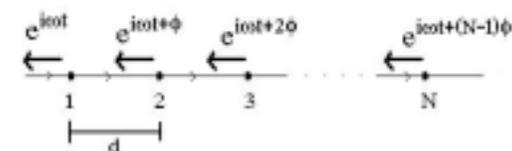


Figura A.1: Se muestra una línea de transmisión donde en puntos equiespaciados se producen reflexiones.

Se supone además que en cada punto se suma una fase a la onda reflejada múltiplo de la primera fase. Entonces, sumando todas las ondas reflejadas:

$$A = e^{i\omega t} + e^{i\omega t + \phi} + \dots + e^{i\omega t + (N-1)\phi} \quad (\text{A.1})$$

Lo cual puede ser expresado:

$$A = e^{i\omega t} \left(1 + e^{i\phi} + \dots + e^{i(N-1)\phi} \right) \quad (\text{A.2})$$

Esta es una serie geométrica de razón $e^{i\phi}$, por lo tanto:

$$A = e^{i\omega t} \frac{1 - e^{i\phi N}}{1 - e^{i\phi}} = e^{i\omega t + \frac{i\phi}{2}(N-1)} \frac{\sin(N\frac{\phi}{2})}{\sin(\frac{\phi}{2})} \quad (\text{A.3})$$

Si la onda incidente tiene amplitud unitaria, entonces la intensidad de la onda reflejada es el coeficiente de reflexión:

$$R = |A|^2 = \frac{\sin^2(N\frac{\phi}{2})}{\sin^2(\frac{\phi}{2})} \quad (\text{A.4})$$

Esta es la ecuación típica de una red de difracción de Fraunhofer.

Es razonable pensar que si $2d = \lambda$ entonces $\phi = 2\pi$, por lo tanto:

$$\phi = 2\pi \frac{2d}{\lambda} = 2\pi \frac{2d}{v} f \quad (\text{A.5})$$

Por lo tanto ϕ es proporcional a la frecuencia.

La transmisión (T) se obtiene inmediatamente al tener en cuenta que sumada a R da la unidad:

$$T = 1 - \frac{\sin^2(N\frac{\phi}{2})}{\sin^2(\frac{\phi}{2})} \quad (\text{A.6})$$

Esta ecuación queda representada gráficamente en la figura A.2 (previamente normalizada):

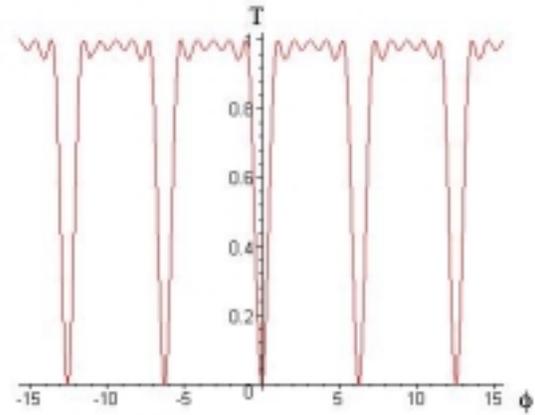
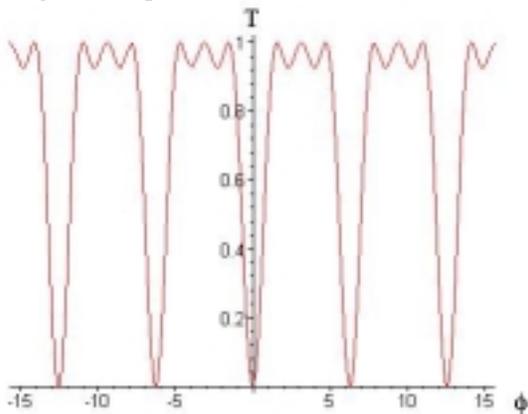


Figura A.2: se muestra la transmisión en función de ϕ con $N = 4$ y $N = 6$ respectivamente.

Los mínimos están equiespaciados y a medida que aumenta N se puede ver que aparecen más oscilaciones entre éstos. La condición para los mínimos es:

$$\phi_{min} = m2\pi \quad (\text{A.7})$$

Donde m es un número entero. Por lo tanto, usando (A.5):

$$f_{min} = m \frac{v}{2d} \quad (\text{A.8})$$

ANEXO A

RG-8/U RG-8A/U RG-11/U RG-11A/U RG-55/U RG-58/U RG-58A/U RG-58C/U RG-59 RG-59A/U RG-59B/U RG-62/U RG-62A/U RG-174/U RG-213/U
Features <ul style="list-style-type: none"> Meets US MIL and Japanese Defence Agency Standards
Applications <ul style="list-style-type: none"> Connecting electronic and telecommunications equipment Connecting measuring instruments Computer data communication

Model		RG-58C/U	RG-59	
Inner conductor	Wires/conductor dia. (mm)	19/0.18	1/0.643	
	Materials	T	CW	
Insulator	O.D. (mm)	2.95	3.71	
	Materials	PE	PE	
Outer conductor 1	Conductor dia. (mm)/wires/strands	0.13/7/16	0.16/5/24	
	Materials	T	A	
Outer conductor 2	Conductor dia. (mm)/wires/strands	-	-	
	Materials	-	-	
Jacket O.D. (mm)		4.95±0.1	6.15±0.2	
Jacket materials		PVC (2)	PVC (1)	
Approx. wt. (kg/km)		40	60	
Std. length (m)		200	100	
Electrical properties	Max. voltage (kV)	1.9	2.3	
	Capacitance (1 kHz) (nF/km)	93.5	68.9	
	Characteristic impedance()	50±2	75±2	
	Std. attenuation (20°C) (dB/km)	1MHz	14	14
		10MHz	43	33
		30MHz	82	66
		100MHz	174	124
300MHz		315	230	
	1GHz	721	459	
A : Annealed copper wire SSPE : Polyethylene cordel T : Tinned annealed copper wire CW : Copper clad steel wire PVC (1) : PVC, black PVC (2) : Non-migration low temperature resistant PVC, black PE : Solid polyethylene PE (1) : Polyethylene, transparent				

Para más propiedades de cables coaxiales, ver:

- ✓ <http://www.epanorama.net/documents/wiring/coaxcable.html>
- ✓ http://dct.draka.com.sg/coaxial_cables.htm,
- ✓ <http://www.drakausa.com/pdfsDSC/pCOAX.pdf>
- ✓ <http://users.viawest.net/~aloomis/coaxdat.htm>):