

# Apantallamiento magnético debido a corrientes inducidas en conductores

Laboratorio 5, Cátedra del Dr. S. Gil, Dpto. de física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, U.B.A.

Pablo Bellino<sup>1</sup> Franco Fiorini<sup>2</sup>

<sup>1</sup> e-mail: pablobx@yahoo.com

<sup>2</sup> e-mail: grupodetransfgral@yahoo.com.ar

Presentado para corrección el día 20 de Marzo de 2002

**Resumen** Se desarrolla un modelo sobre el blindaje de un campo magnético al atravesar materiales conductores de diferentes características y espesores. Se obtienen mediciones sobre la atenuación de dichos campos en función de la frecuencia en un rango de hasta 6 kHz, caracterizándose el comportamiento de las corrientes inducidas en el conductor.

## 1. Introducción.

### 1.1. Naturaleza de las corrientes inducidas.

De acuerdo a la ley de inducción de Faraday, la variación temporal del flujo de un campo magnético  $\mathbf{B}$  a través de una superficie abierta arbitraria, es fuente de una fuerza electromotriz (fem) que tendrá la dirección definida por la curva que forme el límite de dicha superficie. En unidades gaussianas esta ley se expresa como:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1)$$

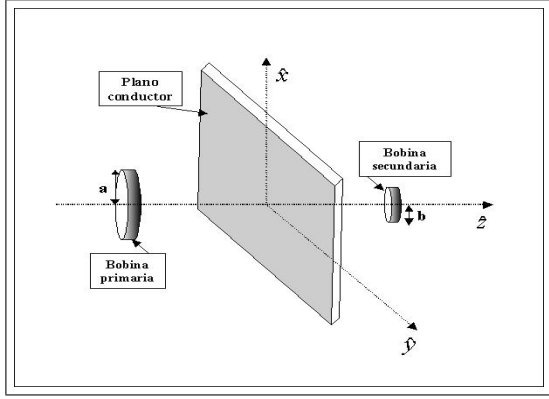
En materiales conductores, esta fem provocará la circulación de corrientes en virtud de la ley de Ohm  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , donde  $\sigma$  es la conductividad del material. Estas corrientes suelen denominarse también parásitas o de Foucault, aunque dichas denominaciones se reservan a veces para las corrientes generadas por movimientos de conductores en presencia de campos magnéticos estacionarios. De todas formas, estas corrientes pueden siempre entenderse en términos de la ley de inducción de Faraday, por lo cual se denominarán simplemente inducidas. Con las anteriores consideraciones es fácil entender el fenómeno de blindaje de campos magnéticos debido a la presencia de materiales conductores adecuadamente dispuestos. Esencialmente, las corrientes inducidas en los conductores serán fuente de nuevos campos magnéticos que tratarán de oponerse a aquellos que le dan origen, siguiendo el comportamiento predicho por el signo menos de la ecuación (1), también conocido como ley de Lenz. En el presente trabajo el blindaje será caracterizado para superficies planas de diferentes materiales y espesores expuestas a la presencia de un campo magnético generado por un arreglo de

espiras. Es de esperar que el efecto del blindaje se vea modificado por las características del material (conductividad, permeabilidad y espesor), como así también por la frecuencia del campo magnético variable.

Si bien el tema de las corrientes inducidas es rigurosamente tratado por muchos autores, entre los cuales se destaca W. R. Smythe [1939], pocos hacen referencia al efecto del blindaje magnético producido por geometrías específicas. W. M. Saslow [1992] ha realizado un detallado estudio teórico sobre las corrientes inducidas en láminas de espesor mucho menor que la penetración de los campos, mientras que S. Fahy et al [1988] han caracterizado el efecto de blindaje para geometrías cilíndricas en presencia de campos transversales, que fue corroborado experimentalmente por P. Rochon y N. Gauthier [1990]. El objetivo del presente trabajo es medir los efectos del blindaje debido a placas conductoras de diferentes características y desarrollar un modelo teórico basado en las ecuaciones de Maxwell que describa el comportamiento de dicho fenómeno, ya que no se encontró en la bibliografía disponible por los autores un modelo que pueda ser aplicado a la configuración experimental utilizada a lo largo de nuestro análisis.

### 1.2. Modelo teórico del fenómeno

El modelo que a continuación será descrito, se basa en el arreglo de espiras y conductor que se observan en la **Figura 1**.



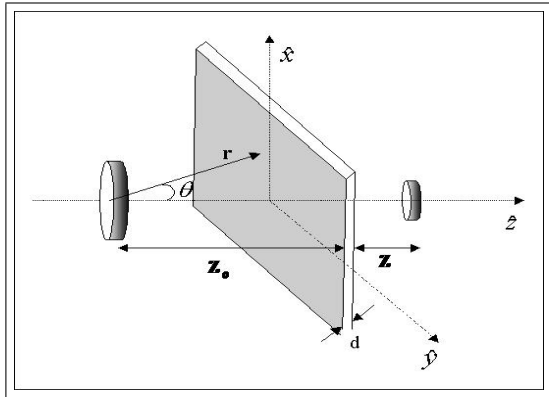
**Figura 1:** Esquema de la disposición de las espiras y del plano conductor.

El campo magnético está generado por un conjunto de espiras circulares que serán denominadas bobinado primario, la placa conductora se interpone entre este y otro bobinado secundario. Resolviendo completamente el problema de la espira de radio  $a$  por la que circula una corriente  $I$  [ver J. D. Jackson ; 1999, sec 5.5], y quedándonos sólo con el término de primer orden (correspondiente a  $n = 0$  en los polinomios de Legendre), obtenemos:

$$B_r^0 = \frac{2\pi a^2}{c r^3} \cos(\theta) \quad (2)$$

$$B_\theta^0 = \frac{\pi a^2}{c r^3} \sin(\theta) \quad (3)$$

donde  $r$  es el módulo del vector posición en coordenadas esféricas con origen en el centro de la espira y  $\theta$  es el ángulo polar (ver figura 2).



**Figura 2:** Diagrama donde se definen las variables utilizadas en este trabajo.

Este resultado es válido sólo para  $r > a$ , ya que en la separación de variables al resolver la ecuación de Poisson para el potencial vector  $\mathbf{A}$  quedan naturalmente definidas las regiones interior y exterior, limitadas por  $r = a$ . Así nuestra primera hipótesis es suponer que la distancia de separación entre el bobinado primario y la placa, que denominaremos  $z_0$ , es mayor que  $a$ . Observemos que, aún a primer orden, el campo presenta dependencia con

el ángulo polar, lo que será de suma importancia en la generación de las corrientes inducidas. Por otro lado, el campo no posee dependencia con el ángulo azimutal  $\phi$ , lo cuál era de antemano conocido por consideraciones de simetría. Para el cálculo de los campos dentro del conductor, será utilizado el método iterativo que suele aplicarse en los campos cuasi-estáticos, consistente en calcular primero los campos suponiendo que la placa es un conductor ideal y luego usarlos para analizar los campos dentro del conductor que ahora es considerado real. Por último, se efectúan las correcciones a los campos exteriores calculados en el principio cerrándose así el primer paso de la iteración. Aunque la iteración puede continuar, en el presente trabajo sólo se realizará el primer paso recién descrito.

En la superficie de un conductor ideal sólo existe un campo eléctrico normal y un campo de intensidad magnética tangencial ( $\mathbf{H}_\parallel$ ). Con estas condiciones de contorno, se puede calcular el campo magnético de una espira enfrentada a conductor ideal. Utilizando el método de imágenes junto con las ecuaciones (2) y (3) se obtiene que sobre la superficie del conductor:

$$\mathbf{H}_\parallel = \frac{3\pi I a^2}{c z^3} \sin(2\theta) \cos^3(\theta) \hat{\rho} \quad (4)$$

donde  $\hat{\rho}$  es el versor radial contenido en la superficie del conductor. Si ahora se supone que el conductor es real, mediante las condiciones límites de los campos en la superficie de separación de los medios, puede verse que la intensidad magnética  $\mathbf{H}_c$  dentro del conductor obedece a la ecuación:

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{H}_\parallel e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\frac{z}{\delta}} \quad (5)$$

Los términos exponenciales dan cuenta del defasaje y de la atenuación sufrida. La coordenada  $z$  está medida desde el comienzo del conductor en dirección  $\hat{z}$ , mientras que  $\delta$  denota la profundidad de penetración definida por:

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}} = \beta \frac{1}{\sqrt{\omega}} \quad (6)$$

donde  $\sigma$  y  $\mu$  son la conductividad y permeabilidad respectivamente, mientras que  $\omega$  es la frecuencia de excitación del campo incidente. Para comprender mejor este resultado recomendamos leer la discusión pertinente expuesta en J. D. Jackson [1999] sec. 8.1, donde además se deduce (5) directamente de las ecuaciones de Maxwell. Además, al no sufrir discontinuidades, la componente normal del campo fuera del conductor se ve fuertemente atenuada, generando corrientes por inducción en el mismo que son mucho más débiles.

De la expresión (5) se deduce (vía ecuaciones de Maxwell), que el campo eléctrico dentro del conductor está dado por

$$\mathbf{E}_c = \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} (1 - i)(\hat{n} \times \mathbf{H}_\parallel) e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\frac{z}{\delta}} \quad (7)$$

donde  $\hat{n}$  es la normal exterior a la superficie del conductor ( $-\hat{z}$ ). Este campo exhibe las características ya conocidas, es decir mucho menor intensidad que el magnético, defasaje respecto del mismo y atenuación exponencial. Introduciendo (4) en (7), obtenemos:

$$\mathbf{E}_c = \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}}(1-i)\frac{3\pi I a^2}{c z_0^3} \sin(2\theta) \cos^3(\theta) e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\frac{z}{\delta}} \hat{\phi} \quad (8)$$

Si se quiere conocer la corriente total en el conductor debemos usar la ley de Ohm e integrar en la variable  $z$ , desde cero hasta el ancho total  $d$ , es decir:

$$\mathbf{K}_{ef} = \int_0^d \sigma \mathbf{E} dz \quad (9)$$

Haciendo el cálculo se tiene:

$$\mathbf{K}_{ef} = \frac{3\pi I a^2}{4z_0^3} \sin(2\theta) \cos^3(\theta) \left[1 - e^{\frac{d}{\delta}(i-1)}\right] \hat{\phi} \quad (10)$$

Se observa que estas corrientes poseen geometría circular, excepto por posibles efectos de borde cerca de los extremos del conductor, que serán despreciados en el análisis. Además la intensidad de las mismas es función de  $\theta$ , o lo que es lo mismo, de la distancia al centro del eje de la espira. Esta corriente que hemos dado en llamar  $\mathbf{K}_{ef}$ , será fuente de un nuevo campo magnético, que de acuerdo a la ley de Biot y Savart, tendrá la siguiente forma para puntos sobre del eje  $z$ :

$$\mathbf{B}_{eje} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{K_{ef} \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho d\phi \hat{z} \quad (11)$$

En esta expresión  $S$  es la superficie de un disco infinito que se supone ubicado en la cara posterior del plano, esta suposición es válida dado que en la configuración utilizada, el ancho del conductor es mucho menor que la distancia entre el plano y el bobinado secundario. El signo menos de la ecuación (11) indica que el sentido de las corrientes es tal que produce un campo en  $-\hat{z}$  oponiéndose al campo incidente. El resultado de efectuar la integración es:

$$\mathbf{B}_{eje} = -\frac{2\pi I a^2}{c(z_0 + z)^3} \left[1 - e^{\frac{d}{\delta}(i-1)}\right] \hat{z} \quad (12)$$

donde se ha usado la expresión para el campo sobre el eje explotando el hecho de que la bobina secundaria posee un radio apreciablemente menor que la primaria, y que se encuentra posicionada a una distancia cercana al conductor (alrededor de 1 cm. en la mayoría de los casos). Así al calcular el flujo del campo sobre ella, fundamentalmente contribuye la zona cercana al eje del mismo, donde el campo puede considerarse homogéneo. El paso siguiente es asumir (basándose en el principio de superposición), que el campo total que llega al bobinado secundario será suma de dos contribuciones, esto es, que estará compuesto por la expresión (12), más el campo de la espira en ausencia de la placa conductora ( $\mathbf{B}_{eje}^\dagger$ ). Para calcular este último

campo sin blindaje se necesita la componente normal del mismo, que se calculará a partir de la ecuación (2) haciendo la aproximación  $\mathbf{B}_{eje}^\dagger \simeq B_r^0(\theta = 0)$ , ya que solo importa el comportamiento sobre el bobinado secundario. El resultado es entonces:

$$\mathbf{B}_{eje}^\dagger = \frac{2\pi I a^2}{c(z_0 + z)^3} \hat{z} \quad (13)$$

Finalmente se procede a superponer los dos últimos campos calculados para obtener el campo magnético total que llega al secundario:

$$\mathbf{B}_{eje}^{tot} = \mathbf{B}_{eje} + \mathbf{B}_{eje}^\dagger = \frac{2\pi I a^2}{c(z_0 + z)^3} e^{-\frac{d}{\delta}} \cos\left(\frac{d}{\delta} - wt\right) \hat{z} \quad (14)$$

donde ya se ha hecho explícita la dependencia temporal de los campos. Queda por último calcular la *fem* inducida en el bobinado secundario, esto se hará suponiendo que el campo total es homogéneo en las proximidades del eje, debido a que  $b \ll z + z_0$  en este trabajo. Entonces:

$$fem = \frac{2\pi^2 V a^2 b^2}{c(z_0 + z)^3 \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \omega e^{-\frac{d}{\delta}} \sin\left(\frac{d}{\delta} - wt\right) \quad (15)$$

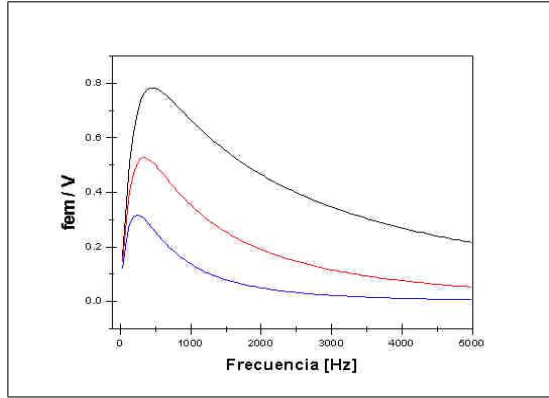
aquí,  $b$  es el radio de la espira secundaria, y la corriente fue reemplazada por la tensión  $V$  y por la impedancia del bobinado primario, de tal forma que  $R$  y  $L$  son la resistencia e inductancia del mismo respectivamente. Esta ecuación también puede escribirse como:

$$\frac{fem}{V} = \frac{Aw}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-\frac{d}{\delta}} \sin\left(\frac{d}{\delta} - wt\right) \quad (16)$$

donde fue normalizada a la tensión de entrada  $V$ .  $A$  es una constante (una vez fijadas las posiciones del conductor y de la espira secundaria), dada por :

$$A = \frac{\pi^2 a^2 b^2 n_1 n_2}{c(z_0 + z)^3} \quad (17)$$

aquí,  $n_1 n_2$  es el producto de la cantidad de vueltas de los bobinados, que recién son tenidos en cuenta, ya que en todo el análisis previo se trabajó como si cada bobinado consistiera de una sola espira. En la **Figura 3** se observa el comportamiento de la función definida por (16) al variar la frecuencia para tres valores de  $\frac{d}{\beta}$  diferentes, y donde el parámetro  $A$  se ha mantenido constante. La curva superior corresponde a  $\frac{d}{\beta} = 0,03$ , mientras que la media e inferior corresponde a 0,05 y 0,08 respectivamente, que son típicos de los materiales utilizados.

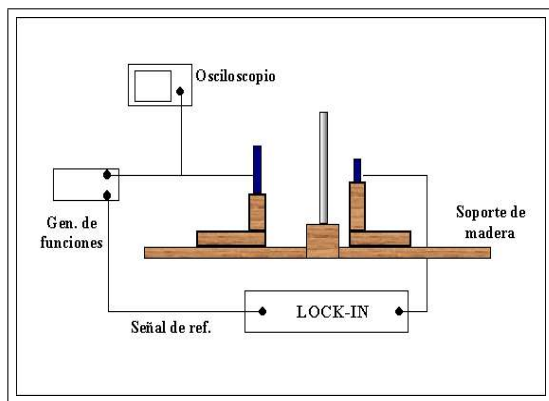


**Figura 3:** Comportamiento de la función definida por (16), para tres valores diferentes de  $\frac{d}{\beta}$ .

Se tiene entonces la expresión (16) que describe completamente el comportamiento del sistema en función de la frecuencia del campo generado. Si bien no se hizo explícito,  $\delta$  posee también una dependencia con la frecuencia dada por la ecuación (6).

## 2. Dispositivo experimental

En la **Figura 4** se esquematiza el dispositivo utilizado en las mediciones. Este consiste en el arreglo de espiras y plano ya mencionado en la sección anterior. El bobinado primario posee un diámetro interior de  $7,8 \pm 0,2 \text{ cm}$  y está compuesto por 700 vueltas de cable de cobre cuyo diámetro es de  $0,5 \text{ mm}$ . Para proteger este bobinado se conectó una resistencia en serie de  $56 \Omega$ , otorgándole al conjunto una resistencia total de  $77 \pm 1 \Omega$ . El secundario posee un diámetro de  $2,7 \pm 0,1 \text{ cm}$  con un bobinado de 2000 vueltas de un cable de cobre de  $0,04 \text{ mm}$ . Ambos bobinados fueron montados sobre un soporte móvil construido en madera para evitar distorsiones en los campos. Entre estos dos se colocó otro soporte con el plano conductor de forma tal que el conjunto quedara alineado, pudiéndose mover libremente sobre el eje de las espiras sin perder la alineación.



**Figura 4:** Dispositivo experimental utilizado para el análisis del blindaje.

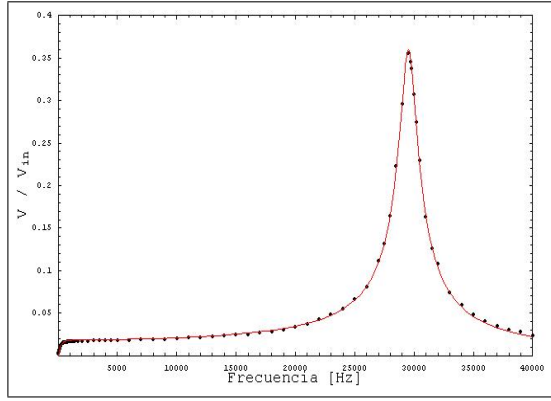
El primario fue usado como fuente del campo magnético que fue alimentado por un generador de funciones digital. El voltaje inducido en el secundario fue medido con un amplificador lock-in cuya señal de referencia era suministrada por el generador de funciones. La ventaja del lock-in es que proporciona una señal de mejor calidad, libre del ruido circundante al experimento. La señal de entrada fue monitorizada por un osciloscopio mientras que la salida del lock-in se midió con un multímetro digital. Todos los contactos carentes de fichas fueron aislados con un recubrimiento de papel de aluminio conectado a tierra. Los conductores que producían el blindaje fueron planchas de aluminio, cobre y bronce, cuyas geometrías fueron rectangulares y de dimensiones suficientemente grandes para validar las aproximaciones hechas en la sección anterior.

Una vez fijadas las distancias características del experimento, las mediciones de la tensión inducida se realizó con una amplitud de entrada constante, mientras que la frecuencia se variaba en un rango de 20 a  $10000 \text{ Hz}$ . El motivo de este intervalo se debió a que para frecuencias mayores se encontraba una resonancia producida por las capacidades parásitas generadas en el bobinado secundario.

Se contó también con un disco de bronce de  $22,5 \pm 0,2 \text{ cm}$  de radio, con el que se analizó también el comportamiento de las corrientes inducidas a una determinada frecuencia. Para medir dichas corrientes se practicó un corte en forma radial hasta el centro de manera tal que los lazos de corriente inducida que se ven interrumpidos por el corte, se cierran en el instrumento de medición (lock-in), puesto que los contactos se hacen en puntos enfrentados de dicho corte.

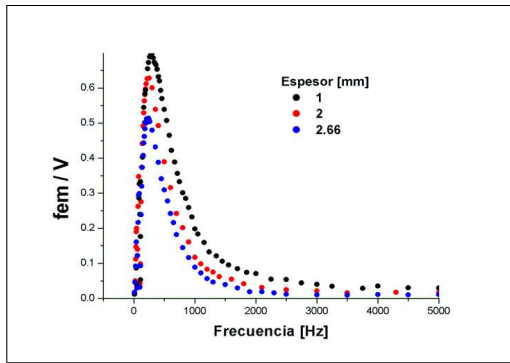
## 3. Resultados

Antes de comenzar con las mediciones del blindaje, fue necesario caracterizar a las bobinas emisoras y receptoras. La bobina secundaria fue modelada como si fuese un circuito RLC, donde C es la capacidad parásita que se hace notable a frecuencias altas. Primero se midió la tensión inducida en el secundario en ausencia de la placa conductora, y se efectuó un barrido de frecuencia. La **Figura 5** muestra la curva obtenida donde se aprecia la resonancia alrededor de los  $30 \text{ kHz}$ . Esta resonancia ( $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ ) fue debida a el bobinado secundario, ya que al analizar solamente a este último, se encontró la misma resonancia. El comportamiento a bajas frecuencias presenta una respuesta lineal de la tensión inducida.



**Figura 5:** Gráfico de la curva de resonancia obtenida con el bobinado secundario en ausencia de blindaje.

En un principio se midió el efecto producido por planchas de aluminio de distintos espesores analizando cómo varía el blindaje. En la **Figura 6** se observa los resultados de dichas mediciones con espesores de  $0,49\text{ mm}$ ,  $0,98\text{ mm}$ , y  $2,50\text{ mm}$  (el error en todas las mediciones fue de  $0,02\text{ mm}$ ).

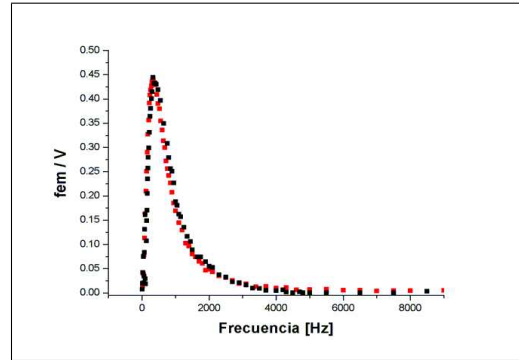


**Figura 6:** Variación del blindaje para diferentes anchos de las placas de aluminio.

Aquí se aprecia que los picos poseen diferentes alturas. Esto está determinado básicamente por  $\beta$ , que en este caso queda caracterizada por el ancho  $d$  de la muestra. Las curvas muestran un comportamiento aproximadamente lineal a bajas frecuencias, que luego se ve modificado cuando el término correspondiente a la impedancia en el primario comienza a dominar. Finalmente la exponencial provoca la inversión de la curva y la hace tender asintóticamente a cero, donde el conductor se comporta como ideal y apantalla completamente el campo. También puede verse que la transmisión para frecuencia igual a cero es nula, debido por supuesto, al hecho de que no hay inducción alguna por tratarse de un campo estático.

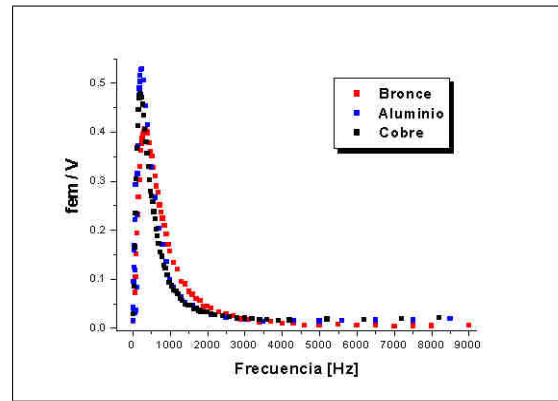
En la **Figura 7** se aprecia un comportamiento análogo para dos muestras de bronce del mismo espesor  $d = 1\text{ mm}$ . Lo importante aquí es que las planchas difieren en su geometría; los puntos negros representan el comportamiento del disco de  $22,5\text{ cm}$  de radio, mientras que los rojos muestran la respuesta de una plancha cuadrada de  $30\text{ cm}$  de lado. La similitud en las curvas refleja el hecho de que

no hay efectos de borde apreciables introducidos por los vértices del cuadrado, o bien que las dimensiones del mismo realmente se comportan como infinitas.



**Figura 7:** Efecto análogo de un disco y un plano cuadrado de bronce.

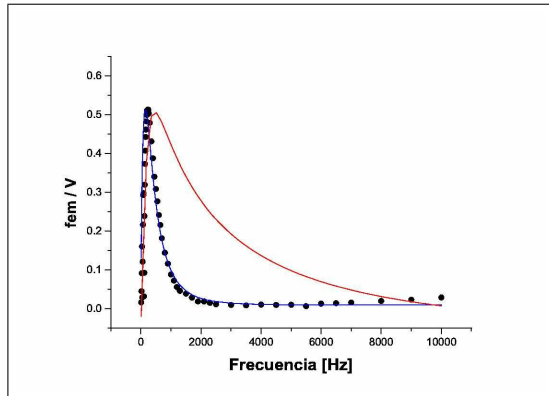
Para contrastar las características propias de los materiales, se efectuaron mediciones en las mismas condiciones y con materiales diferentes, pero del mismo espesor. Así, las diferencias obtenidas (que se aprecian en la **Figura 8**), dan cuenta exclusivamente de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ . Según puede verse, el bronce es el conductor que proporciona el mayor blindaje, seguido por el cobre y finalmente por el aluminio. Esto es compatible con los valores de  $\delta$  suministrados en los libros de Nikolski y Reitz que se detallan en las referencias.



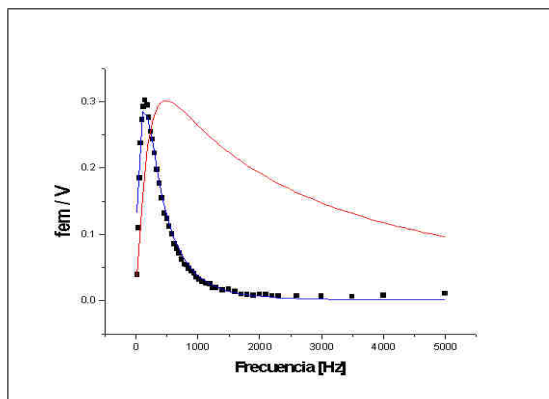
**Figura 8:** Comportamiento de diferentes materiales ubicados a la misma distancia y del mismo espesor.

En la **Figura 9** se contrastan los resultados experimentales con los predichos por el modelo para una plancha de aluminio de  $2,5\text{ mm}$  de espesor. Sobre los puntos experimentales se encuentra el fiteo de la función en el que se deja a  $d/\beta$  como parámetro libre. El resultado de este fiteo arroja un valor de  $d/\beta = 0,13 \pm 0,01\text{ seg}^{-\frac{1}{2}}$ . El valor teórico es de  $d/\beta = 0,03\text{ seg}^{-\frac{1}{2}}$ , esta discrepancia se puede deber a la omisión del efecto pelicular en los cables, que se traduce en un aumento de la resistencia efectiva de los mismos, o lo que es igual, en un decaimiento exponencial más rápido. En la **Figura 10** se efectúa este mismo

análisis para una muestra de cobre de 1,8 mm de espesor, obteniéndose un valor de  $d/\beta = 0,15 \pm 0,01 \text{ seg}^{-\frac{1}{2}}$ , mientras que el teórico es de  $0,02 \text{ seg}^{-\frac{1}{2}}$ .

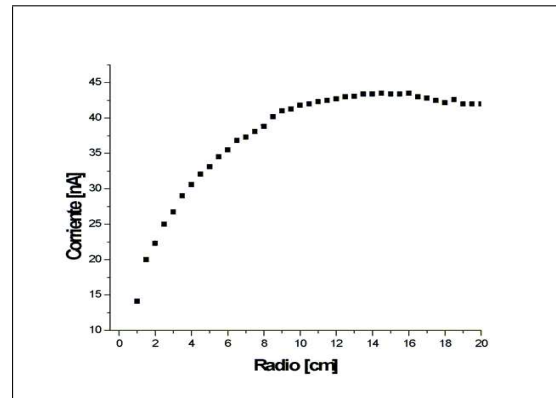


**Figura 9:** Comparación entre el modelo (rojo) y los datos experimentales para una muestra de Al. La curva azul es el fito de dichos datos.



**Figura 10:** Comparación entre el modelo (rojo) y los datos experimentales para una muestra de Cu. La curva azul es el fito de dichos datos..

Por último, caracterizamos la distribución de corrientes inducidas en la superficie del disco de bronce. La medición de estas se efectúa deslizando los contactos de las fichas clip a través de una ranura previamente realizada radialmente en el disco. Se tuvo el cuidado de que estos contactos siempre permanecieran opuestos entre ellos para evitar la medición de diferentes lazos. De esta forma el circuito de corriente se completaba en el lock-in. La **Figura 11** muestra el resultado obtenido, en donde debe destacarse el comportamiento creciente a distancias cercanas al centro del disco.



**Figura 11:** Comportamiento de las corrientes inducidas en función del radio de disco.

#### 4. Conclusiones

En el presente trabajo se dedujo un modelo basado en las ecuaciones de Maxwell, donde se pone en evidencia la atenuación de los campos electromagnéticos dentro de los conductores. Sin embargo la discrepancia entre los datos obtenidos y el modelo evidencian algún efecto no considerado. Tales efectos podrían ser en principio introducidos por no considerar condiciones de contorno sobre la cara posterior del conductor donde podría ocurrir algún fenómeno disipativo no tomado en cuenta. Además se ignoró la influencia del efecto pelicular, que cobra importancia a frecuencias crecientes. El esmero y cuidado con que fueron realizadas las mediciones, junto con el detallado modelo expuesto, hacen creer a los autores que la problemática subyacente en este fenómeno es aún mas compleja.

#### Referencias

- Fahy S., Kittel C. y Louie S. *Electromagnetic screening by metals*. Am. J. Phys. **11**, 989 (1988)
- Jackson J. D. *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, New York ) 2nd edition.
- Nikolski V. V. *Electrodinámica y propagación de ondas de radio* (Mir, Moscú, 1976)
- Reitz, Milford y Christy. *Fundamentos de la teoría electromagnética*. (Adisson-Wesley), 4ta ed.
- Rochon P. y Gauthier N. *Strong shielding due to an electromagnetically thin metal sheet*. Am. J. Phys. **58**, 276 (1990)
- Saslow W. M. *Maxwell's theory of eddy currents in thin conducting sheets, and applications to electromagnetic shielding and MAGLEV*. Am. J. Phys. **60**, 693 (1992)
- Smythe W. R. *Static and Dynamic Electricity* (Mc Graw - Hill, New York, 1939)