

Resonancias Acústicas en una Caja

Alan Garbar y Sebastián Fortín

Merengue84@hotmail.com y sefx@gmx.net

Laboratorio 5 –FCEyN – UBA -2005

Resumen: en este trabajo se obtuvieron los distintos modos de vibración de ondas acústicas estacionarias dentro de un prisma recto de base rectangular. Los resultados obtenidos fueron exitosamente comparados con los teóricos.

INTRODUCCIÓN

Cuando una partícula se encuentra confinada a un volumen finito su energía toma ciertos valores discretos, según la mecánica cuántica. En particular, si el volumen es como una caja de zapatos, al resolver la ecuación de Schrödinger y utilizar las condiciones de contorno la solución para las energías es:

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right) \quad (1)$$

Donde m es la masa de la partícula, a , b , y c las dimensiones de la caja y n_x , n_y y n_z tres números enteros independientes. Corroborar esto experimentalmente puede resultar muy complicado. Sin embargo, existe un fenómeno no cuántico análogo a éste: las frecuencias de resonancia de ondas acústicas dentro de la misma caja. Es esto lo que en este trabajo se estudia.

La ecuación de ondas acústicas para la presión es la siguiente¹:

$$\nabla^2 p + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

Donde c es la velocidad del sonido. A esta ecuación se la complementa con las condiciones de contorno de la presión sobre las paredes, ya que las paredes de la caja son rígidas las partículas de aire sobre esta no pueden moverse, esto se traduce en condiciones sobre la presión:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{\text{paredes}(y,z)} = 0 \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{\text{paredes}(x,z)} = 0 \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{\text{paredes}(x,y)} = 0 \quad (5)$$

queda completamente planteado el problema. Es sencillo mostrar que la solución es:

$$p = A e^{i\omega t} \cos\left(\frac{\pi}{a} n_1 x\right) \cos\left(\frac{\pi}{b} n_2 y\right) \cos\left(\frac{\pi}{c} n_3 z\right) \quad (6)$$

Donde A es una constante, ω la frecuencia angular de oscilación, a , b y c las dimensiones de la caja correspondientes a los ejes x , y , z respectivamente; n_1 , n_2 y n_3 son números enteros que denotan los modos de oscilación. La relación que deben cumplir los parámetros de la ecuación anterior es:

$$\omega = \pi c \left[\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2} \right]^{1/2} \quad (7)$$

En términos de la frecuencia queda:

$$f = \frac{c}{2} \left[\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2} \right]^{1/2} \quad (8)$$

Entonces se ve claramente como la frecuencia de oscilación está discretizada. Cada valor de f es un modo de oscilación o modo normal. Comparando la ecuación (8) con la (1) se ve claramente la analogía entre los dos problemas.

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Se utilizó para la realización de esta experiencia una caja prismática de madera terciada, con dimensiones a , b y c . Primeramente se confirmó que estas dimensiones no fueran múltiplos una de otras. Dos caras opuestas poseían agujeros cuya finalidad era introducir en la caja la onda acústica por medio de un parlante de y medirla en otro extremo con un micrófono. La disposición se ilustra en la Figura 1:

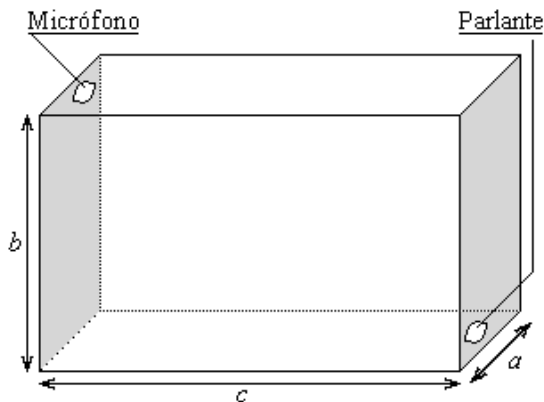


Figura 1. La forma de la caja con la disposición de agujeros para apoyar el parlante e introducir el micrófono.

El orificio para el parlante tenía 4cm de diámetro y el del micrófono unos 1.5cm. Para excitar el parlante se lo conecto a un generador de funciones programable desde el cual se pudo controlar la amplitud y frecuencia de la onda de presión dentro de la caja. Para medir esta última se colocó en el correspondiente orificio un micrófono electret, el cual conectado a un amplificador de audio entregó una señal medible.

Primeramente se intentó determinar las frecuencias de resonancia ingresando la señal del amplificador de audio a un amplificador Lock-in que tomaba como referencia la excitación entregada al parlante. Como se muestra en la Figura 2 la tensión entregada por el Lock-in se midió con un voltímetro:

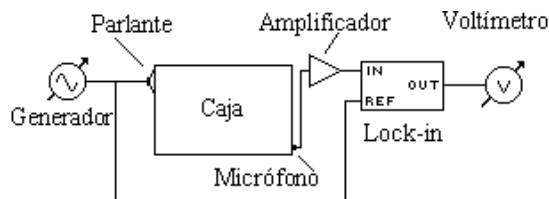


Figura 2. Disposición de los instrumentos de medición en el primer intento por determinar las frecuencias de resonancia.

La tensión registrada por el voltímetro era inestable e imposible de determinar, por este motivo se reemplazó el voltímetro una placa de adquisición de datos conectada a una PC con la cual se pudo promediar los valores de tensión y obtener un valor. Se configuró el generador para que entregara una señal senoidal de 60Hz, la cual se fue subiendo lentamente mientras se observaba en la pantalla de la PC como cambiaba la tensión. Se logró encontrar el primer pico de resonancia pero luego de subir más la frecuencia comenzaron a observarse picos de tensión negativa, lo cual indicó que las variaciones de tensión no solo se debían a los cambios de la amplitud de la onda dentro de la caja sino que además y sobretodo se debían al corrimiento de la fase entre las señales de entrada y referencia del Lock-in. Por este motivo se reemplazó el Lock-in por un osciloscopio en el cual se podían observar directamente los cambios de amplitud de la señal entregada por el amplificador. De esta manera se encontraron 8 frecuencias de resonancia, sin embargo este método no proporcionó mucha precisión ya que los cambios de amplitud sutiles no son detectables a simple vista en el osciloscopio y se dudaba acerca de si alguno de los valores era realmente un máximo de amplitud. Se calcularon los valores teóricos de frecuencias de resonancia usando (8), como se desconocía la velocidad del sonido en las condiciones del laboratorio se usó provisoriamente el valor 330m/s. Seguidamente se comparó la lista de frecuencias obtenidas experimentalmente y teóricamente y se ajustó la velocidad del sonido para que los valores coincidieran, también se ajustaron los valores de a , b y c , para compensar el significativo error introducido por la dificultad de medir las dimensiones del interior del recinto teniendo en cuenta el grosor de la madera estando cerrada la caja. No obstante estos ajustes se observó que no se detectaron resonancias en rangos que fueron medidos y otros estaban bastante del valor teórico. Para mejorar la calidad de la medición y conseguir detectar las resonancias restantes se configuró el generador para que entregara una señal de amplitud constante cuya frecuencia cambiara linealmente en un tiempo de 300s de 200Hz a 2000Hz. A la salida del amplificador de audio se conectó un rectificador de media onda y la salida de este último a la placa de adquisición de datos. De esta forma se registró un valor de tensión proporcional

a la amplitud de la onda en función del tiempo. Para relacionar el tiempo medido con la frecuencia de excitación se utilizó la salida de sincronismo del generador, la cual entrega un pico de tensión en el momento que comienza la rampa de frecuencias. Este sincronismo se ingresó a la placa de adquisición y se la configuró para que comenzara la medición al detectar el pico de sincronismo. El diagrama de conexión puede observarse en la Figura 3:

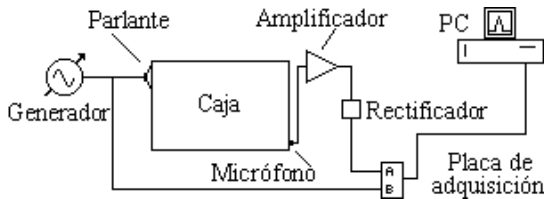


Figura 3. Disposición de los instrumentos en la medición refinada de resonancias.

Se realizaron tres barridos consiguiendo graficar la intensidad en función de la frecuencia, comparando los tres gráficos se pudieron eliminar los picos generados por el ruido aleatorio del medio ambiente. Con estos gráficos se lograron identificar 45 frecuencias de resonancia y el ancho de los picos. También en este caso se ajustaron los valores de a , b , c y la velocidad del sonido lo cual fue difícil debido a la cantidad de resonancias encontradas, para esto se usó una planilla de Excel que graficaba los datos medidos y teóricos, mediante una serie de botones se podía variar los valores.

RESULTADO Y ANÁLISIS

En el primer intento de determinar las frecuencias de resonancia obtuvimos el gráfico que se muestra en la Figura 4:

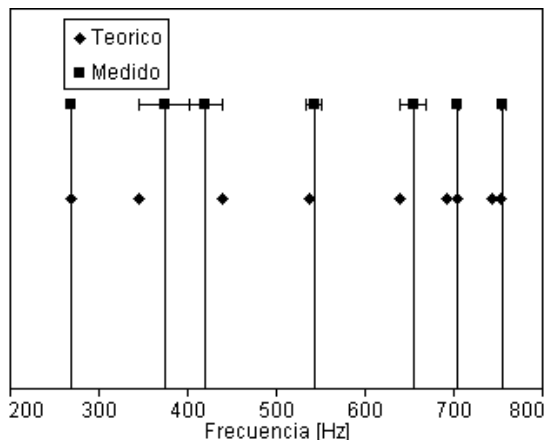


Figura 4. Comparación de las frecuencias teóricas con las medidas. Puede observarse que la correlación no es muy buena y hay dos puntos teóricos no medidos.

En el refinamiento automatizado con la rampa de frecuencias se obtuvieron gráficos como los que se observan en las Figuras 5 y 6:

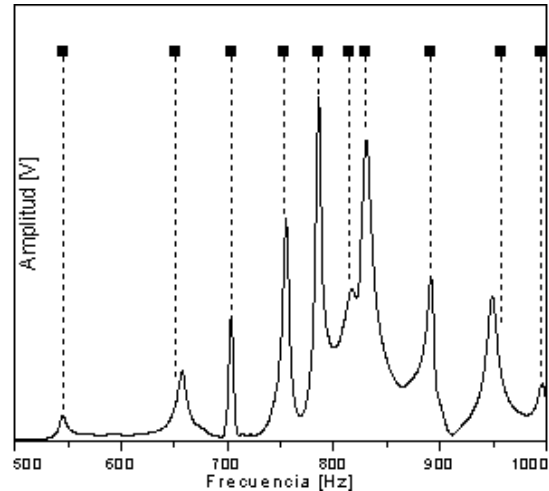


Figura 5. Comparación de las frecuencias teóricas con las medidas. El gráfico corresponde a los valores de tensión medidos y los puntos por encima indican el valor teórico de las frecuencias.

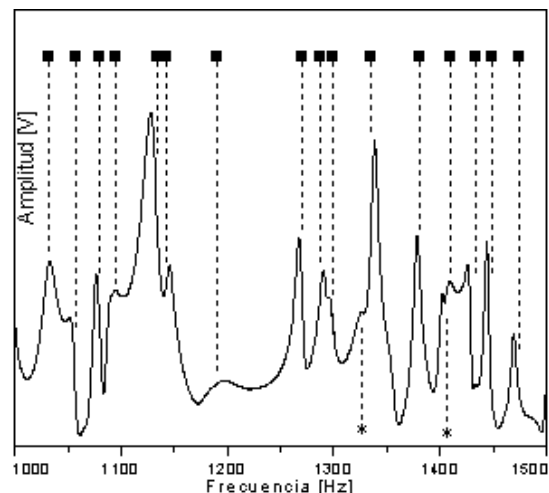


Figura 6. Comparación de las frecuencias teóricas con las medidas. El gráfico corresponde a los valores de tensión medidos y los puntos por encima indican el valor teórico de las frecuencias.

En estos gráficos puede observarse que la correlación es mucho mejor, y todos los picos teóricos tienen correlación con los picos medidos. Sin embargo se midieron picos que no fueron

predichos por la teoría, por ejemplo las llamadas con asteriscos (*) en la Figura 6 muestran dos ejemplos de deformaciones que corresponden a dos picos no esperados. Cabe aclarar que estos se repitieron en todas las mediciones por lo cual no se las pudo atribuir al ruido. No esta clara la razón por la que aparecen estas irregularidades pero como se trabajo con un circuito compuesto de varios componentes es posible que aparezcan frecuencias de resonancia de por ejemplo el parlante, el micrófono, el amplificador o el rectificador, es importante destacar el rol que jugó la respuesta en frecuencia del parlante ya que el mismo era notoriamente ineficiente para frecuencias bajas y mejora para frecuencias mayores a 500 Hz, por lo que la altura de los picos en el grafico no corresponde a la amplitud de la onda en el interior de la caja. Por otro lado algunas frecuencias aparecen algo corridas lo que indica que quizás el ajuste de a , b , c y la velocidad del sonido no fueron los óptimos o quizás las imperfecciones en la construcción de la caja y la aproximación de que en la madera no se conduce el sonido introduzcan perturbaciones, sobretodo a frecuencias alta, donde la densidad de perturbaciones no explicadas crece.

Para hallar el ancho de los picos se grafico individualmente cada pico, y se midió la diferencia de frecuencias entre los puntos en los que la amplitud del pico cae a la mitad. Un ejemplo se muestra en la Figura 7:

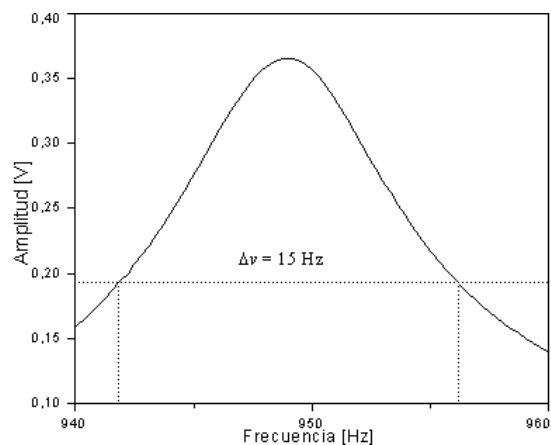


Figura 7. Ejemplo de un pico aislado en el que se determino el ancho del pico.

En los casos en que el pico se encontraba aislado su ancho pudo medirse sin problemas, sin embargo como puede apreciarse en la Figura 5 y 6 mucho picos se encontraban superpuestos, con lo cual se dificulto la medida, cuando picos de diferente amplitud se encontraban cercanos pudo

medirse el ancho de solo uno de ellos, ya que el menor se encuentra demasiado deformado como confiar en su forma, tal es el caso de los dos picos de la Figura 8:

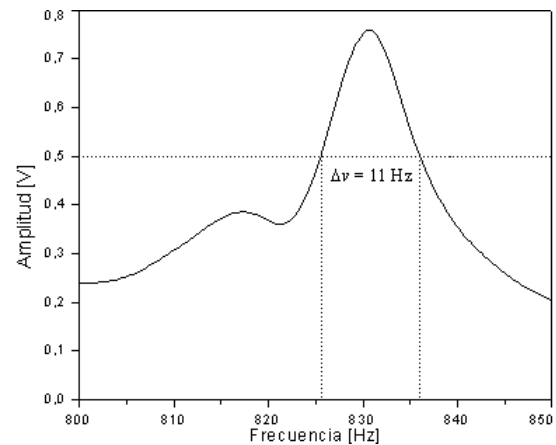


Figura 8. Ejemplo de dos picos superpuestos en el que fue posible medir el ancho de uno de ellos.

Además en frecuencias altas se encontraron picos demasiado superpuestos como para medir su ancho. Y finalmente picos como el que se muestra en la Figura 9 que en apariencia son un pico aislado, pero corresponden a dos frecuencias de resonancia demasiado cercanas como para distinguir alguna irregularidad.

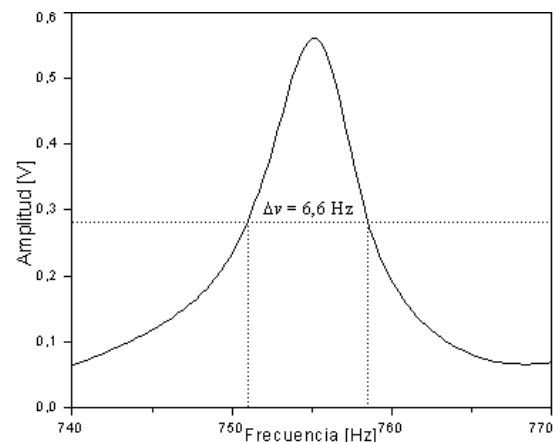


Figura 9. En apariencia se encuentra un pico pero corresponde a la superposición de los modos $(n_1=1, n_2=0, n_3=1)$ y $(n_1=0, n_2=2, n_3=1)$.

La forma del grafico inspeccionada a simple vista no sugiere la existencia de dos picos y podría dudarse de la teoría que predice la existencia de estos, pero un barrido mas agudo confirma que la forma del pico no es regular. Se encuentra en la Figura 10 una ampliación del pico de la Figura 9 tomada en un nuevo barrido donde se observa la

irregularidad que se presume es causa de la existencia de dos picos muy próximos:

$$c = 0.636 \pm 0.001 \text{ m}$$

$$V_s = 346.78 \text{ m/s}$$

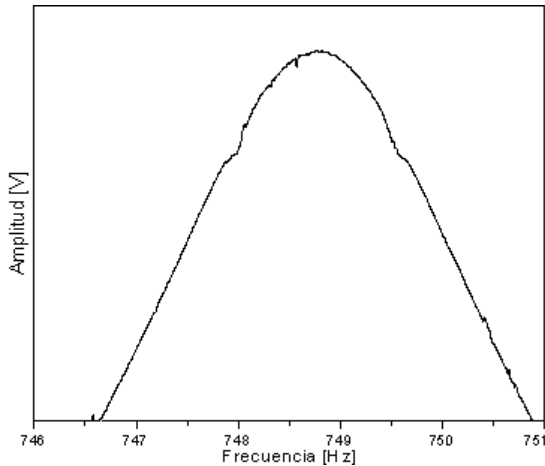


Figura 10. Se muestra la irregularidad en los picos superpuestos.

En la Tabla 1 se representan los anchos de los picos que pudieron distinguirse.

Modo (n_1, n_2, n_3)	Frecuencia [Hz]	Ancho [Hz]
(0,0,1)	272	19
(0,0,2)	545	10
(0,1,3)	649	12.3
(0,2,0) y (1,0,0)	704	3.6
(1,0,1) y (0,2,1)	755	6.6
(1,1,0)	788	5.5
(1,1,1)	833	11
(0,2,2) y (1,0,2)	891	9.5
(1,1,2)	958	15
(1,2,0)	996	14.5
(1,2,2)	1270	6.2
		$\epsilon = 0.1 \text{ Hz}$

Tabla 1. Se muestran los anchos que fue posible medir, el resto de los valores se descartó por encontrarse deformado debido a la proximidad de otro pico de magnitud comparable.

Los valores de las dimensiones de la caja utilizada medidos inicialmente fueron:

$$a = 0.25 \pm 0.001 \text{ m}$$

$$b = 0.504 \pm 0.001 \text{ m}$$

$$c = 0.648 \pm 0.001 \text{ m}$$

Luego de ajustar los valores se corrigieron las dimensiones y se determinó la velocidad del sonido:

$$a = 0.246 \pm 0.001 \text{ m}$$

$$b = 0.492 \pm 0.001 \text{ m}$$

CONCLUSIONES

En la primera aproximación el modelo parece ajustar bien pero con cierto error y no se detectan algunos picos. El análisis más detallado revela que los parámetros pueden ajustarse hasta cierta frecuencia, pero es muy difícil encontrar los valores óptimos de a , b , c y la velocidad del sonido con una planilla de Excel si se tienen en cuenta más de 20 resonancias. Una posible mejora sería realizar un programa que intente correlacionar los picos con las frecuencias de resonancia automáticamente. Por otro lado podría usarse un parlante cuya respuesta a la frecuencia no cambie tan rápidamente.

[1] Laboratorio 5 – Efecto fotoeléctrico - FCEyN, UBA (2005). De Física re-Creativa – S.Gil y E. Rodríguez – Prentice Hall, Buenos Aires 2001.

[2] M. Alonso y E.J. Finn, Física, vol. II, Campos y ondas, y vol.III, Fundamentos Cuánticos y Estadísticos (Fondo educativo Interamericano; ed inglesa, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1967)

[3] Ondas, Berkeley Physics Course – Volumen 2, Editorial Reverte (1968)