

Estudio de la dependencia de la impedancia con la frecuencia de un conductor metálico - Efecto Piel

E. Kropff, J. von Stecher. (kropff@cnea.gov.ar y jon_von_stecher@ciudad.com.ar)
Laboratorio 5 - Departamento de Física - FCEyN - Universidad de Buenos Aires- Agosto 2000

Se estudia la impedancia de un tramo de cable cilíndrico perteneciente a un circuito de corriente alterna. En el modelo se tiene en cuenta la variación de campo magnético dentro del cable, lo que arroja como resultado una dependencia de la impedancia con la frecuencia, tanto en la parte resistiva como en la inductiva (Efecto Piel). Se comprueba el rango de validez del primer orden de aproximación de este modelo.

I. Introducción

El objetivo del presente experimento es estudiar el efecto de la conducción de corrientes alternas a lo largo de un cable de cobre. En particular se desea estudiar las desviaciones respecto de la teoría simplista según la cual todo elemento de circuito tiene una resistencia y una autoinductancia independientes de la frecuencia de la corriente.

Cuando se hace pasar corriente continua por un cable, la misma se distribuye homogéneamente a lo largo de la sección. Cuando, en cambio, se utiliza corriente alterna, la homogeneidad se rompe y las cargas tienden a acercarse a la superficie del cable. Este fenómeno puede verse, en las ecuaciones de Maxwell, como el efecto de una fuente adicional de campo eléctrico, a saber, la variación de campo magnético dentro del metal.

Al suceder este corrimiento de las cargas hacia los bordes del cable la resistencia aumenta debido a que la sección efectiva del cable disminuye. Al mismo tiempo disminuye el flujo de campo magnético dentro del cable (téngase en cuenta que el campo generado por un cilindro es nulo en su interior) lo que provoca que decaiga la autoinductancia.

Típicamente se utiliza para describir la importancia de este fenómeno en casos específicos el parámetro a/δ , donde a es el radio de los cables involucrados y δ la distancia de penetración (*skin depth*), dada por $\delta = (2/\sigma\mu\omega)^{1/2}$ en unidades SI. Aquí σ es la conductividad del material, μ la permeabilidad y ω la frecuencia de la corriente. El fenómeno es poco importante cuando el parámetro mencionado es menor que 1.

Si se plantea el problema de un cable cilíndrico por el cual circula una corriente alterna, la corriente $j(r)$ y el campo eléctrico $E(r)$, donde r es la distancia al centro, son paralelos al eje del mismo, mientras el campo magnético $B(r)$ se encuentra en la dirección angular. Combinando las ecuaciones de Maxwell se obtiene:

$$\frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} = \frac{2iE}{\delta} \quad (1)$$

despreciando las corrientes de desplazamiento. La solución a esta ecuación es:

$$E = \frac{AI_0(r(2i)^{1/2})}{\delta} e^{i\omega t} \quad (2)$$

con

$$A = \frac{(2i)^{1/2} \omega \mu I}{4\pi R I_1((2i)^{1/2} a / \delta)} \quad (3)$$

Donde I_n es la función de Bessel modificada de orden n e I es la corriente. De esta manera, si V_s es el potencial en la superficie del cable, puede escribirse:

$$V_s = Z(\omega) I(t) \quad (4)$$

donde Z es la impedancia efectiva. Para llegar a este resultado se tiene en cuenta que el circuito utilizado para medir la diferencia de potencial V_s entre dos puntos está pegado a la superficie del cable¹.

Puede obtenerse una expresión aproximada para Z en potencias de $(a/\delta = 2(\omega\tau)^{1/2})$, donde τ es un tiempo característico, $\tau = \sigma\mu a^2$.

Así quedan definidas la resistencia y la inductancia efectivas como:

$$R \approx (1/\pi\sigma a^2)[1 + \omega^2 \tau^2/192] \quad (5)$$

$$L \approx (\mu l/8\pi)[1 - \omega^2 \tau^2/384] \quad (6)$$

aproximando a segundo orden.

II. Desarrollo experimental

En la Fig. 1 se muestra un diagrama de la disposición de instrumentos. Se utiliza un cable de cobre de aproximadamente 2 mm de diámetro. El circuito se cierra a través de un cilindro, como se indica en la figura, de manera de minimizar el efecto del campo magnético producido por el resto del circuito. Se añade una resistencia de 57 ohm. Sobre los puntos a y b se mide la caída de potencial utilizando un lock-in. Se toman medidas tanto en fase como en

contrafase para frecuencias de entre 1 y 30 kHz.

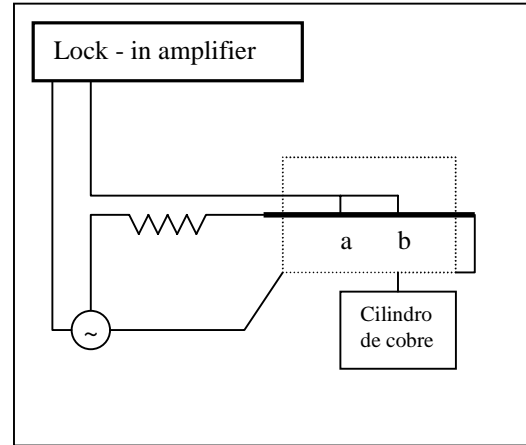


Fig. 1 Diagrama del circuito utilizado. Se mide la caída de potencial entre los puntos a y b . La entrada de frecuencia del lock in se alimenta desde el generador de funciones.

III. Análisis de datos

Utilizando las aproximaciones (5) y (6) para bajas frecuencias se ajustan los resultados experimentales.

La resistencia del cable se obtiene a partir de la asíntota a baja frecuencia para distintas corrientes.

Los circuitos de medición presentan una inductancia que no es despreciable. Su dependencia con la frecuencia, en cambio, sí lo es para el rango en que se trabaja, debido a la relación a/δ de los cables involucrados. De esta manera el potencial en contrafase con la corriente queda:

$$V_L = I \omega (L(\omega) + L_{inst}) \quad (7)$$

Para obtener L_{inst} , la inductancia debida al instrumental, se utilizan los valores experimentales de V_L en bajas frecuencias, restando a la inductancia total el primer término de (6).

¹ Una justificación detallada de estos resultados puede hallarse en **Am. J. Phys.**, Vol. 50, No. 5, Mayo 1982.

IV. Resultados

En la Fig. 2 se muestran los resultados experimentales para la resistencia. También se muestra la aproximación teórica a segundo orden (5).

En la Fig. 3 se muestran los resultados experimentales para la inductancia total y para la inductancia $L(\omega)$ que queda luego de restar L_{inst} . También se muestra la aproximación teórica a segundo orden (6).

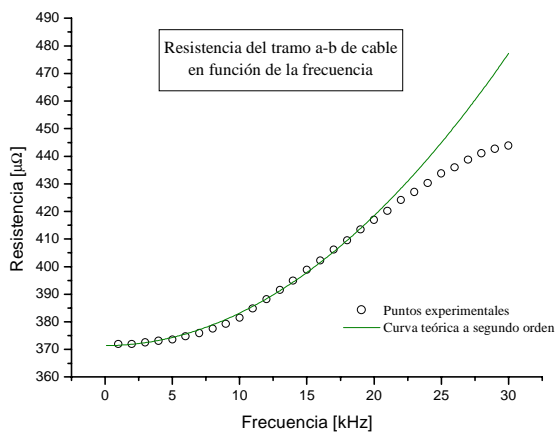


Fig. 2 Resistencia del tramo a-b de cable en función de la frecuencia. Se muestra también la curva teórica a segundo orden (5).

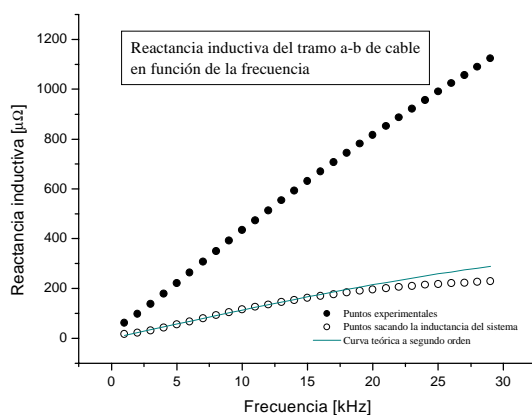


Fig. 3 Reactancia inductiva del tramo a-b de cable en función de la frecuencia. También se muestran la reactancia total y la curva teórica a segundo orden (6).

V. Conclusiones

Se observa claramente en las Figs. 2 y 3 que tanto la resistencia como la autoinductancia de un cable cilíndrico dependen de la frecuencia en un circuito alterno.

También se observa que el modelo a segundo orden en $\omega\tau$ ajusta bien los datos hasta una frecuencia de aproximadamente 15 kHz. Teniendo τ un valor de 0,246 ms, $\omega\tau$ alcanza la unidad alrededor de los 4 kHz. A partir de este punto la relevancia de cada término de la aproximación depende de las constantes que lo acompañan.

VI. Bibliografía

- ¹ J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons (1962).
- ² E. M. Purcell, *Electricidad y Magnetismo*, 2^{da} edición, Editorial Reverté, Barcelona (1990).
- ³ J. R. Gosselin, P. Rochon, N. Gauthier, *Am. J. Phys.* **50**, 440-443 (1982).
- ⁴ W.R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity* - Mc Graw Hill N.Y. 1950 (Hemisphere, N.Y. 1989-3rd Printing).