

# Estudio de un oscilador mecánico no lineal.

Patricia Martínez - Marcelo Azuaga

Laboratorio IV - Dpto. de Física - UBA 1997

*El objetivo de este trabajo fue construir y analizar un oscilador mecánico no lineal. El sistema utilizado, constaba principalmente de una planchuela de acrílico que oscilaba entre dos bobinas, y un par de bandas elásticas que al tomar contacto con la planchuela introducían efectos no lineales. Estudiando éste tipo de sistemas en resonancia, es posible encontrar la llamada "histéresis mecánica".*

## I.- FUNDAMENTOS TEÓRICOS :

### El fenómeno de la resonancia

Antes de avanzar sobre los fenómenos involucrados en los osciladores no lineales, recordemos algunos resultados básicos de los osciladores lineales :

Si una fuerza externa  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$  es aplicada a un oscilador armónico sujeto a una fuerza viscosa  $-b \dot{x}$ , la ecuación diferencial de movimiento puede escribirse :

$$m \ddot{x} = -b \dot{x} - kx + F_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

La solución general de esta ecuación está formada por la solución de la ecuación homogénea, mas una solución particular. La solución de la ecuación homogénea, tiende a cero en un tiempo corto, por lo cual se la conoce como *solución transitoria*. Después que ha transcurrido este tiempo, el movimiento de la masa  $m$  está dado esencialmente por la solución particular, llamada *solución de estado estacionario*<sup>1</sup>. Esta solución estacionaria puede ser escrita de la siguiente forma :

$$x(t) = A(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega)] \quad (2)$$

donde :

$$A(\omega) = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (3)$$

$$\text{tg}(\varphi(\omega)) = \frac{b\omega}{(k - m\omega^2)} \quad (4)$$

La amplitud  $A(\omega)$  depende de la frecuencia de la fuerza externa, por lo tanto, la frecuencia de resonancia  $\omega_R$  es aquella para la cual la amplitud es máxima.

Utilizando este hecho, obtenemos :

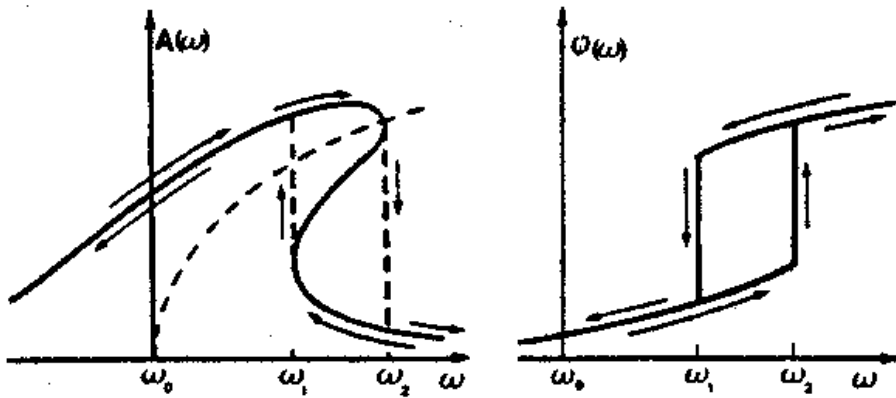
$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2} \quad (5)$$

y además podemos decir :

$$A(\omega)_{\text{MAX}} = \frac{F_0}{\frac{b}{m} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{m^2}}} \quad (6)$$

La diferencia de fase  $\varphi(\omega)$  varía lentamente desde  $\varphi \cong 0$  para  $\omega \ll \omega_0$  hasta  $\varphi \cong \pi$  para  $\omega \gg \omega_0$

Decimos que tenemos un oscilador no lineal cuando la fuerza restitutiva  $-kx$  es reemplazada por  $-k(x)x$ , es decir, que la constante de Hooke depende de la posición. Un ejemplo importante es aquel en que  $-k(x)x = -(1 + \beta x^2)x$ , para el cual, la ecuación de movimiento resultante es llamada ecuación de Duffing<sup>2</sup>. La solución aproximada de esta ecuación se encuentra aplicando técnicas de perturbación y puede ser escrita en la forma de la ecuación (2), donde,  $A(\omega)$  y  $\varphi(\omega)$  son mucho más complicadas, como se ve en la siguiente figura :

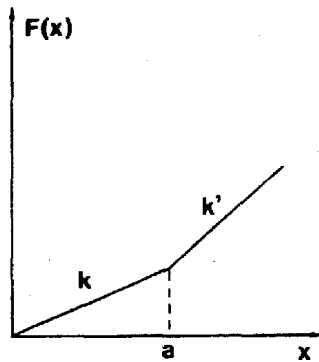


**Figura 1** Representación esquemática de la amplitud versus frecuencia, y el desfase versus la frecuencia para un oscilador no lineal que cumple con la ecuación de Duffing<sup>2</sup>.

Consideremos ahora un oscilador no lineal mucho más simple, donde la fuerza restitutiva está dada por :

$$F(x) \begin{cases} -kx & x \leq a \\ -k'x & x \geq a \end{cases} \quad (7)$$

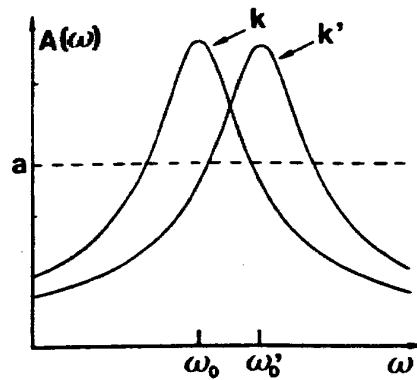
El gráfico de esta fuerza es el siguiente :



**Figura 2** Fuerza restitutiva usada en nuestro modelo de oscilador no lineal.

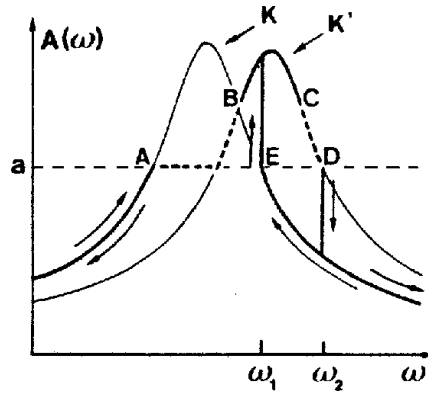
Comparado este ejemplo con el de Duffing, en el que la fuerza varía en forma cúbica con  $x$ , podemos decir que el modelo propuesto por la ecuación (8) es una versión más simple del mismo.

Claramente vemos de la figura (2) y de la ecuación (8) que para  $a=0$  tenemos un oscilador lineal de constante  $k'$  y frecuencia de resonancia  $\omega'_0$ , mientras que para  $a \rightarrow \infty$  tenemos un oscilador lineal de constante  $k$  y frecuencia de resonancia  $\omega_0$ . En estos casos el gráfico de amplitud versus frecuencia es el siguiente :



**Figura 3** Gráficos de amplitud versus frecuencia correspondientes a dos constantes elásticas  $k$  y  $k'$ .

Cuando  $a$  toma un valor distinto de cero y de infinito, ambas fuerzas restitutivas deben ser consideradas. Supongamos que la amplitud máxima de la oscilación es mayor que  $a$  como se ve en la figura (4).



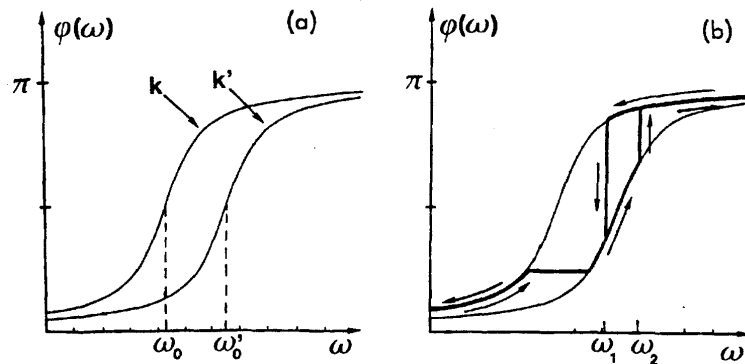
**Figura 4** Representación de la respuesta en amplitud para un oscilador no lineal gobernado por la fuerza representada en la figura 2<sup>2</sup>.

Aquí vemos que cuando la frecuencia aumenta, aumenta la amplitud de la vibración y, cuando ésta supera el valor de  $\underline{a}$ , la fuerza restitutiva pasa a depender de  $k'$ . Analicemos cada tramo por separado :

- OA** aquí, la fuerza restitutiva depende de  $k$
- AB** en este tramo, hay una transición que se espera que sea continua es decir, que se produzca suavemente ante pequeños cambios de amplitud.
- BC** en este caso es la fuerza dependiente de  $k'$  la que gobierna el movimiento, y la amplitud resultante seguirá aumentando hasta llegar al máximo de la curva de respuesta dada para  $k'$
- CD** aquí, cuando  $w$  aumenta disminuye la amplitud hasta llegar al valor crítico  $\underline{a}$  en el punto D. A partir de  $w_2$ , las amplitudes son menores que  $\underline{a}$  y por lo tanto, es la fuerza restitutiva con constante  $k_1$  quien entra en juego.

Si ahora recorremos el camino inverso disminuyendo la frecuencia  $w$ , encontramos un salto similar al de ida en  $w_1$  donde la oscilación pasa de ser regida por la constante  $k$  a serlo por la constante  $k'$ . Estos saltos son los que caracterizan al comportamiento de un sistema no lineal.

Consideraciones similares se aplican a la dependencia de la fase  $\phi(w)$  para el caso no lineal, como se ve en las figuras (5a) y (5b)



**Figura 5** Gráficos de desfases correspondientes a (a) osciladores lineales con  $k$  y  $k'$ , (b) oscilador no lineal de acuerdo a la fuerza de la figura 2<sup>2</sup>.

### Naturaleza de la fuerza externa :

Hablemos ahora de la naturaleza de la fuerza externa que impulsará nuestro sistema oscilador mecánico. Dicha fuerza es debida a la acción del campo magnético de dos bobinas coaxiales, sobre dos pequeños imanes situados a ambos lados de una planchuela de acrílico, y sobre el eje común de las bobinas. Como dicha fuerza resulta del producto entre el momento dipolar magnético de los imanes y el gradiente del campo magnético según la dirección del eje de ambas bobinas, procuramos que el campo magnético cercano a la posición de los imanes sea lineal en la posición para una dada corriente constante. Por lo tanto, si logramos esto, la fuerza sobre los imanes se mantendría constante, por lo menos en un rango determinado alrededor de la posición de equilibrio de nuestro sistema. Es conocida la configuración llamada de Helmholtz donde dos bobinas se conectan de tal modo que trabajen en oposición de campos, logrando producir un campo uniforme cerca de la posición media entre ambas bobinas. Para ello se obtiene que la relación óptima para que ello ocurra a lo largo de un trayecto lo más amplio posible es que el radio de las bobinas debe ser igual a la distancia de separación entre ellas<sup>3</sup>.

De modo similar, pero ahora conectando ambas bobinas como solidarias ( es decir, que cuando el campo de una de ellas empuja a los imanes, la otra tira de ellos) se produce un campo cerca de la posición media entre bobinas que es aproximadamente lineal a lo largo de un tramo sobre el eje.

Si desarrollamos en serie de Taylor la expresión del campo magnético de ambas bobinas alrededor del punto medio entre ellas, y dada la simetría planteada por la forma en que se encuentran conectadas entre sí ambas bobinas (la cual se manifiesta en la forma impar del campo magnético que ellas producen sobre el eje) nos encontramos que solo sobreviven los siguientes términos en el desarrollo :

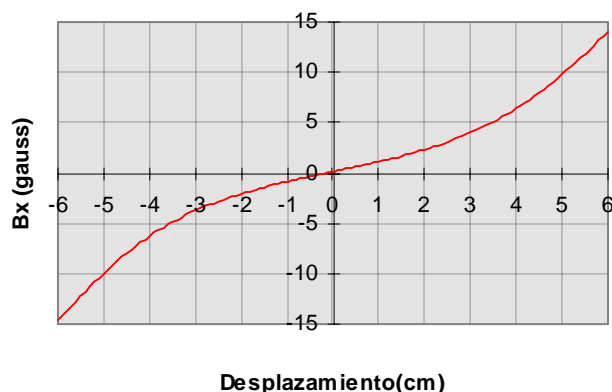
$$B_x(x) = B'(x=0).x + \alpha B'''(x=0).x^3 + \dots \quad (8)$$

Para lograr que el segundo término de este desarrollo no aparezca en la expresión del campo se debe cumplir la siguiente relación entre el radio  $R$  de las bobinas y la separación  $d$  entre ellas :

$$d = \sqrt{3} * R \quad (9)$$

De esta forma, se obtendría el máximo desplazamiento posible de los imanes, experimentando sobre ellos una fuerza que no variaría en este trayecto. Dicha fuerza vendría dada por el producto entre el momento dipolar de los imanes y  $B'(x=0)$ .

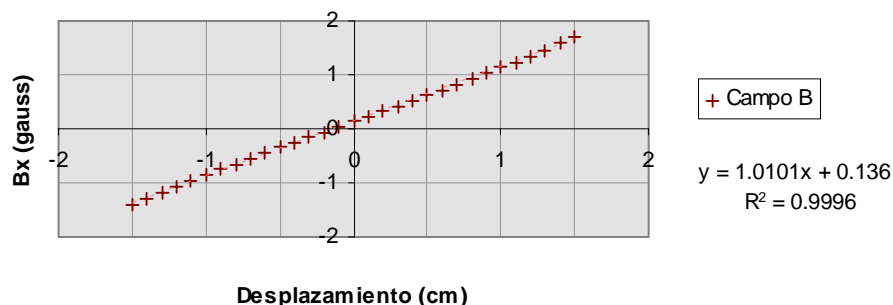
Aunque no se cumpla estrictamente la ecuación (10), es posible obtener un rango de desplazamientos donde la fuerza de las bobinas sobre los imanes sea aproximadamente constante. Este es el caso de la configuración armada en nuestra experiencia , donde la expresión del campo sobre el eje de las bobinas fue hallada teniendo en cuenta el largo, radio, número de vueltas de cada bobina, separación entre bobinas y corriente circulante por ellas. El resultado de éste cálculo se observa graficado en la figura 6.



**Figura 6** Representación del campo magnético en el eje de las bobinas en función del desplazamiento de los imanes.

Como se observa en la figura, el gradiente del campo según  $x$  se mantiene aproximadamente constante alrededor de la posición media de las bobinas. Es en este rango de desplazamientos donde la fuerza magnética sobre los imanes se mantendrá constante para una dada corriente fija. Fuera de este trayecto, la fuerza irá aumentando a medida que los desplazamientos sean mayores. En la figura 7 se observa el rango donde se mantiene la dependencia lineal del campo con el desplazamiento  $x$  de los imanes en el caso de nuestra experiencia. Si ahora alimentamos nuestras bobinas con una corriente que varíe senoidalmente en el tiempo, obtendremos una fuerza magnética, que en éste rango también variará senoidalmente como la señal de alimentación. Esta fuerza cumpliría entonces con los términos de la ecuación (1) que rige el movimiento de nuestro oscilador.

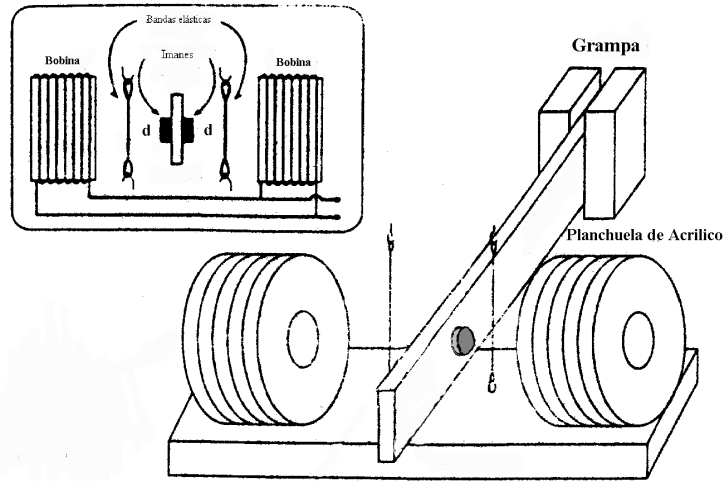
**Figura 7** Detalle del campo magnético en las proximidades de la posición media



entre las bobinas, mostrando un rango de linealidad de aproximadamente  $\pm 15\text{mm}$ .

## II.- ARREGLO EXPERIMENTAL:

Básicamente, el arreglo montado durante la experiencia consistió en una planchuela de acrílico montada horizontalmente, la cual tenía adosado cerca de su extremo libre un par de imanes, los cuales eran impulsados por el campo magnético producido por las bobinas, tal como se ve en la figura 8 :



**Figura 8** Vista en perspectiva del arreglo experimental montado donde se aprecia en detalle, la posición de los imanes permanentes, las bobinas impulsoras y las bandas elásticas que transformaron el sistema en no lineal<sup>4</sup>.

La planchuela se encontraba firmemente sujeta en uno de sus extremos por una grampa, de tal manera que su otro extremo podía oscilar entre las bobinas colocadas a ambos lados. Las bobinas fueron alimentadas desde un generador de ondas senoidal Keithley, que permitía variar la frecuencia en el rango de 0-3 Hz que requería la experiencia permitiendo corrientes de no más de 100mA, las cuales fueron suficientes para nuestras necesidades.

Para registrar el movimiento de la planchuela, se montó a la altura del centro de masa de la misma, una fotocelda cuya señal de salida fue recogida juntamente con la señal de alimentación en una P.C. provista de una placa digitalizadora y el software necesario para su análisis posterior (MPLI<sup>7</sup>) (ver figura 9).

Del análisis de la evolución temporal de ambas señales en el MPLI, para las distintas frecuencias de la señal del generador de ondas, se obtuvieron los resultados para amplitudes y desfases entre ambas señales en función de la frecuencia de la fuerza impulsora.

La experiencia se dividió en dos etapas: en la primera de ellas la fuerza restitutiva de la ecuación (1) era la fuerza elástica lineal de la propia planchuela siguiendo la ley de Hooke; en la segunda etapa se agregaron bandas elásticas verticales a ambos lados de la planchuela, las cuales generan una fuerza restitutiva no lineal tal como se mencionó en los fundamentos teóricos del presente informe.

Mencionemos entonces las características de todos los elementos empleados en esta experiencia:

Bobinas:      *Radio* = 34mm  
                       *Longitud* = 70mm  
                       *Nº de vueltas* = 3000  
                       *Separación entre bobinas* = 120mm  
                       *Diámetro del cable* = 0.65mm (#22)  
                       *Corriente circulante por cada bobina* = 30 mA

Planchuela:    *Material* : Acrílico.

*Longitud libre = 798mm*

*Espesor = 3.2mm*

*Ancho = 40mm*

Imanes: *Material : Neodimio, Boro, Ferrite.*

*Radio = 6mm*

*Alto = 4mm*

*Masa = 3,4 gr. c/u*

*Campo remanente a 25°C = 1.28 Tesla.<sup>5</sup>*

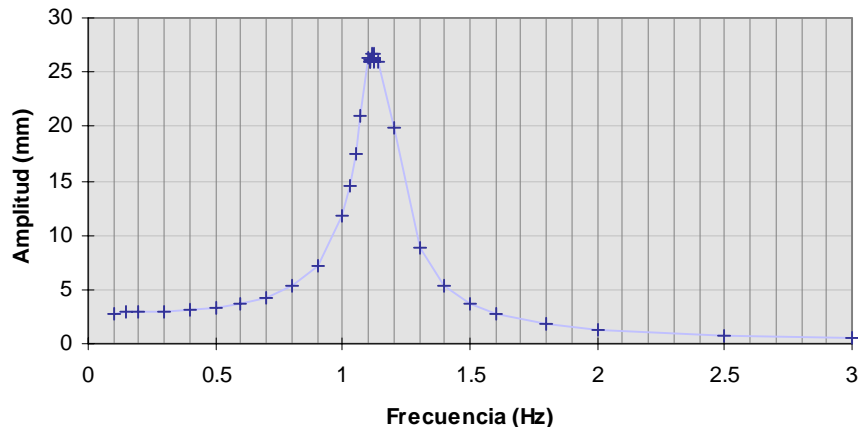
*Posición de los imanes : 80mm del extremo libre de la planchuela.*

### III.- RESULTADOS :

Como se mencionó en el arreglo experimental, se procedió a registrar tanto la señal de alimentación de las bobinas como la proveniente de la fotocelda. Ambas señales fueron tomadas simultáneamente por la placa digitalizadora y analizadas a través del software que la acompaña (MPLI- *Interfase multipropósito de laboratorio*).

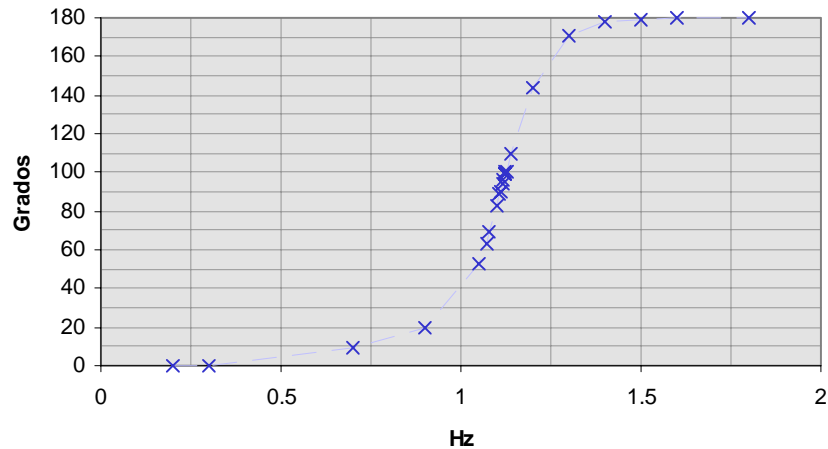
Para cada frecuencia originada en la señal de entrada, se obtuvo la amplitud de la señal de la fotocelda mediante un ajuste hecho con el MPLI. De la misma manera, observándose las evoluciones temporales simultáneas de ambas señales, se calcularon a partir del corrimiento entre ellas en el eje temporal, los desfases para cada frecuencia de excitación.

El primer barrido de frecuencias realizado correspondió a las oscilaciones del sistema lineal sin la presencia de las bandas elásticas. Los resultados obtenidos para las amplitudes y los desfases en término de la frecuencia de excitación, se observan en las figuras 11 y 12. En todos los casos se procedió a calibrar la salida de la señal de la fotocelda (Volts) contra el desplazamiento (mm) de la planchuela a la altura de los imanes, para poder graficar directamente dichos desplazamientos en función de las frecuencias.



**Figura 11** Gráfico de amplitud versus frecuencia para el sistema lineal en ausencia de bandas elásticas.





**Figura 12** Desfasaje entre la señal de entrada y la de la fotocelda versus la frecuencia para el sistema lineal en ausencia de bandas elásticas. Se observa la evolución del desfasaje desde  $0^\circ$  hasta  $180^\circ$ .

Mediante un ajuste gaussiano del pico de resonancia, se obtuvo como frecuencia de resonancia lineal del oscilador estudiado :

$$f_0 = 1,12 \pm 0,01 \text{ Hz} \quad (10)$$

Por otro lado, con la misma fotocelda como detector de movimiento, se hizo oscilar libremente la planchuela ( sin la presencia de las bobinas ) y a través del análisis de Transformada de Fourier (FFT) provisto por el MPLI, se obtuvo la frecuencia natural de oscilación de la planchuela de acrílico. En este caso, el resultado fue :

$$f_0 = 1,14 \pm 0,02 \text{ Hz}, \quad (11)$$

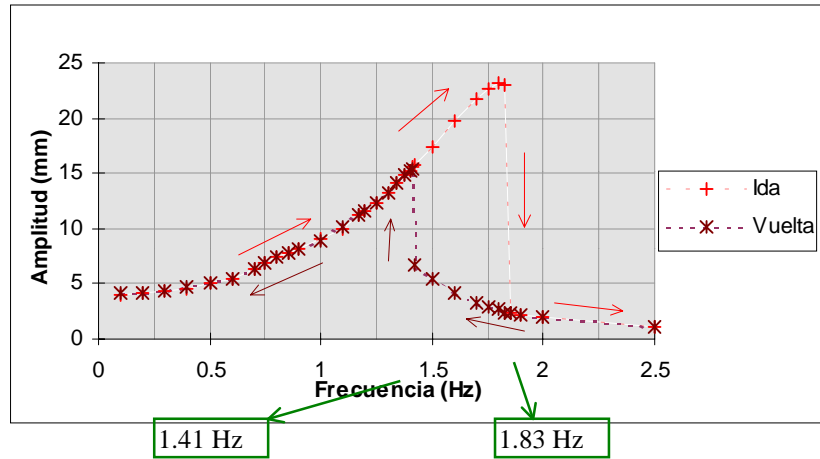
el cual concuerda con lo esperado para la resonancia de nuestro sistema lineal.

Una vez analizado nuestro oscilador forzado lineal, procedimos a colocar las bandas elásticas a ambos lados de la planchuela, a la altura de la posición de los imanes.

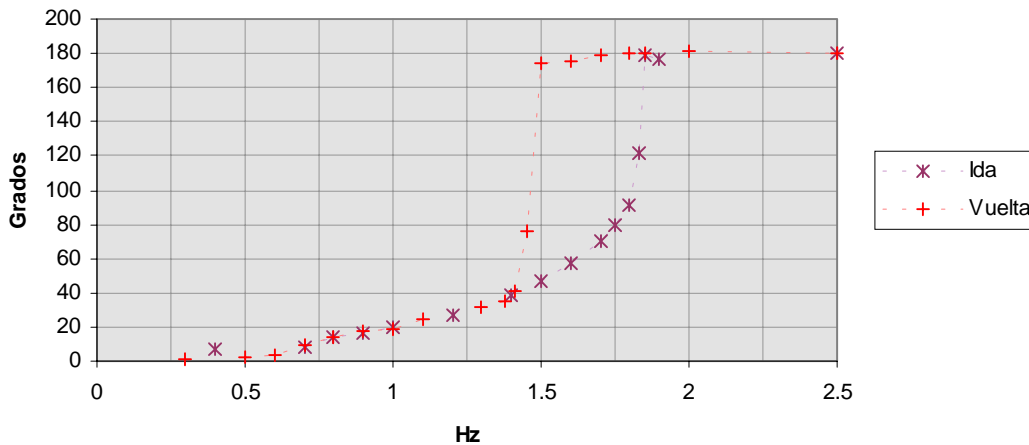
Se realizaron barridos de frecuencias de ida y vuelta para tres distintas posiciones de las bandas elásticas : 5mm, 10mm y 0mm , distancia medida entre los imanes y las bandas elásticas. Se obtuvieron los correspondientes gráficos de amplitud de desplazamiento de la planchuela contra la frecuencia, y en el caso de 5mm también se graficó el desfasaje entre las señales en función de la frecuencia de excitación.

Todos estos resultados se encuentran graficados en las figuras 13,14,15 y 16.

Observemos en detalle uno de estos gráficos a modo de ejemplo. En la figura 13 se observa la evolución de las amplitudes de desplazamiento de la planchuela en función de la frecuencia, para el caso en que las bandas elásticas se encuentran a 5mm de los imanes.



**Figura 13** Gráfico de la amplitud en función de la frecuencia para el oscilador no lineal con las bandas elásticas a 5 mm de la planchuela de acrílico. Se observa el fenómeno de histéresis mecánica.

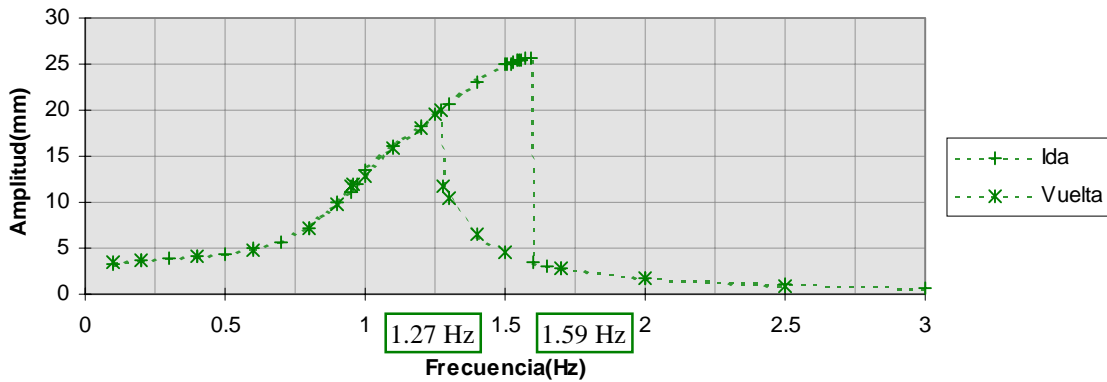


**Figura 14** Desfasaje entre las señales en función de la frecuencia de excitación para el oscilador no lineal correspondiente a las bandas elásticas colocadas a 5 mm de la planchuela.

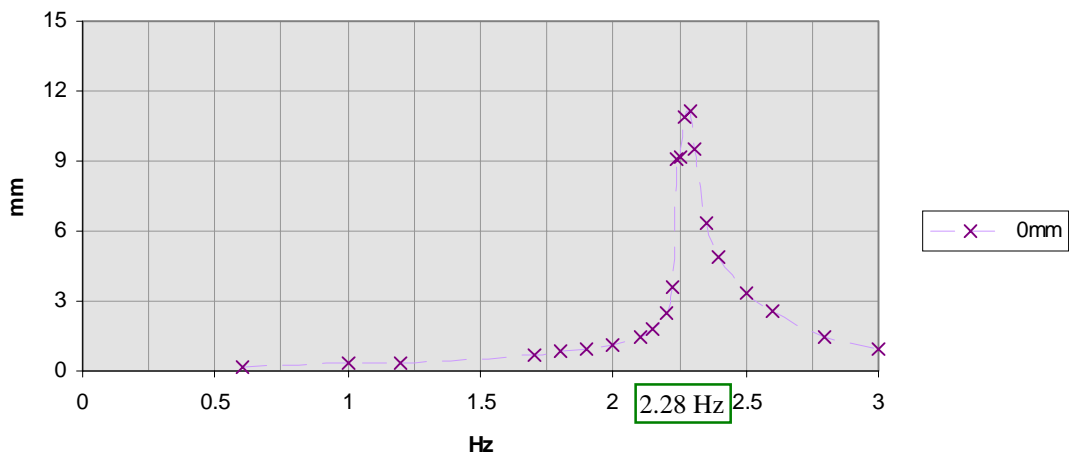
A medida que la frecuencia aumenta, también lo hace la amplitud de la misma manera que lo haría si no hubiera bandas elásticas colocadas. Cuando el desplazamiento llega a los 5 mm y la planchuela empieza a tocar a las bandas elásticas, la amplitud sigue aumentando pero a un ritmo menor que cuando no había bandas elásticas presentes. Como resultado, el pico de frecuencia se corre hacia una frecuencia de 1,83 Hz, en la cual cae abruptamente la amplitud. Luego, las bandas dejan de actuar nuevamente y la amplitud decae lentamente a medida que la frecuencia aumenta.

En el barrido de vuelta, las amplitudes aumentan gradualmente hasta encontrarse la planchuela nuevamente con las bandas elásticas, donde se produce un nuevo salto, siguiéndose posteriormente el mismo recorrido que a la ida.

Estos dos saltos también se producen en el desfase entre señales observado en la figura 14 en las mismas frecuencias que anteriormente ocurría con las amplitudes.



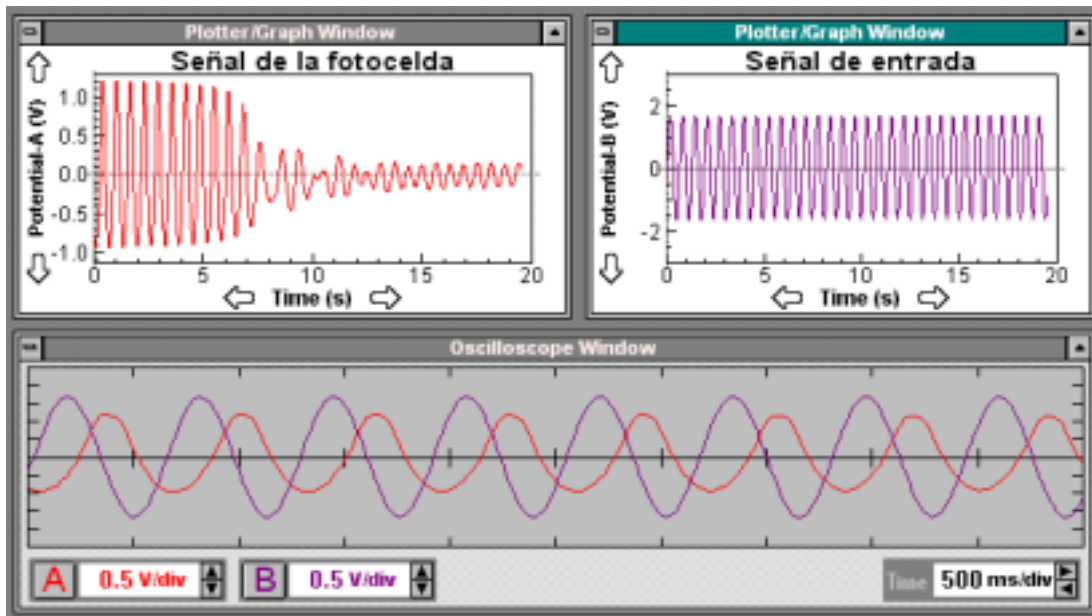
**Figura 15** Gráfico de la amplitud versus frecuencia para el sistema no lineal con las bandas elásticas a 10 mm de la planchuela.



**Figura 16** Amplitud para el oscilador lineal obtenido cuando las bandas elásticas están en contacto con la planchuela.

Este comportamiento es típico de los sistemas no lineales, donde la manera en que evolucionan las amplitudes depende de si estamos aumentando ó disminuyendo la frecuencia de excitación del sistema, generando lo que se da en llamar *histeresis mecánica*.

En la figura 17, se observan las señales tomadas del MPLI para el momento preciso en que se producía la resonancia cuando la distancia a las bandas elásticas era de 5mm.



**Figura 17** Pantalla extraída del MPLI donde se puede observar la transición de amplitudes al llegar a la resonancia el sistema con las bandas elásticas a 5 mm. En la pantalla del osciloscopio, se observa un desfase aproximado de  $90^\circ$  como corresponde a resonancia,

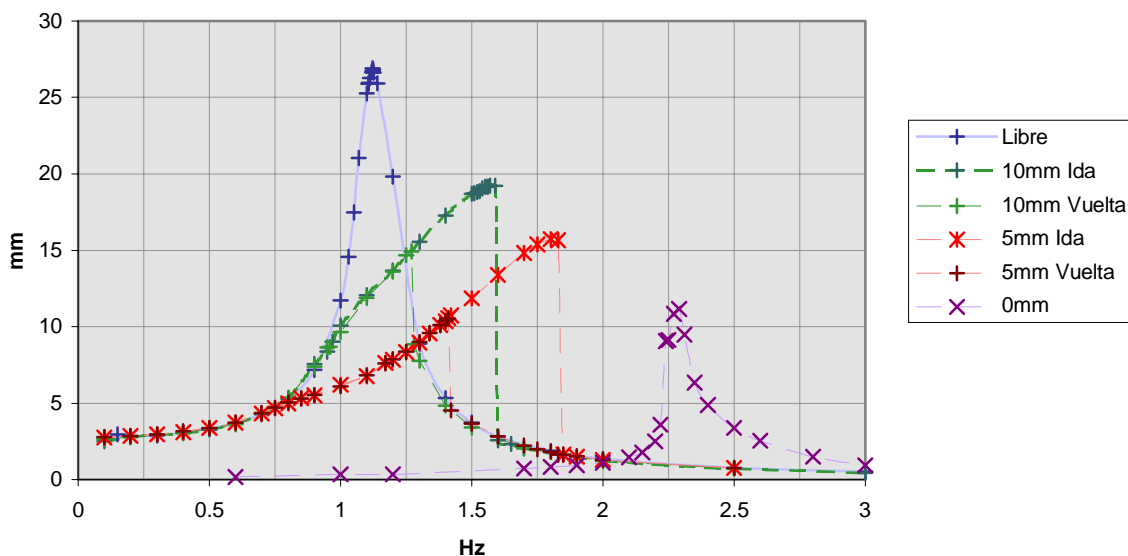
Se observa el cambio repentino de la amplitud de la señal de la fotocelda, y también en la pantalla del osciloscopio se puede apreciar el corrimiento entre ambas señales que es de aproximadamente  $90^\circ$  como se espera en resonancia.

En la figura 18, se muestra la pantalla del osciloscopio en dos casos extremos para apreciar el cambio de desfases entre ambas señales : en el primer caso se trata de una frecuencia mucho menor que la resonancia, observándose a las señales prácticamente en fase ; en el segundo caso, la frecuencia es superior a la de resonancia evidenciándose un desfase de  $180^\circ$  entre ambas. Justamente a partir de estas pantallas de osciloscopio del MPLI<sup>7</sup>, se obtuvieron los gráficos de desfases contra frecuencia, observando los corrimientos entre ambas señales en el eje temporal.



**Figura 18** Evolución de las señales en el osciloscopio. En la pantalla superior se observan las señales en fase para frecuencias mucho menores que la de resonancia. En la pantalla inferior se observa un desfase de  $180^\circ$  a frecuencias mayores que resonancia.

Veamos en la figura 19 el gráfico conjunto de todas las evoluciones realizadas, es decir : sin bandas elásticas, con bandas a 10mm, a 5mm y a 0 mm.



**Figura 19** Representación conjunta de los cuatro casos estudiados en la experiencia :sin bandas elásticas, con bandas a 10mm, con bandas a 5mm y con bandas en contacto con la planchuela.

Este gráfico muestra bien a las claras como influyen las distintas posiciones de las bandas elásticas en las curvas de amplitudes. Primeramente, se observa como en el caso de las bandas a 5 ó 10 mm, los recorridos son los mismos del caso lineal (sin bandas elásticas) hasta que comienzan a tocar las bandas elásticas. Allí las curvas se apartan del recorrido lineal y van en búsqueda del pico de resonancia que se encuentra más lejos cuanto más cercanas estén las bandas de la planchuela. Una vez alcanzados dichos picos, las curvas caen nuevamente sobre el recorrido del sistema lineal. La vuelta también se produce por el mismo trayecto lineal hasta encontrarse con las bandas, donde se produce el abrupto salto hacia las curvas propias de los recorridos de ida. Finalmente, cuando la planchuela deja de tocar las bandas elásticas, coinciden sus recorridos con el del sistema lineal.

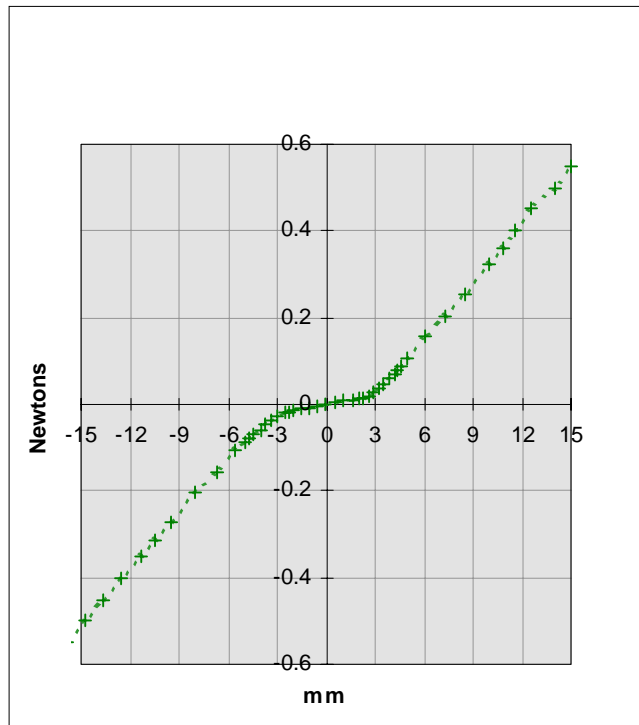
En el caso de las bandas elásticas colocadas a 0mm de los imanes ( es decir, que las bandas actúan desde un principio sumándose a la constante elástica propia de la planchuela de acrílico), se observa un recorrido típico de un sistema lineal con una constante elástica mayor que la anterior.

Para poder apreciar con mayor claridad la naturaleza de la fuerza restitutiva presente en nuestra experiencia, graficamos el valor de dicha fuerza en función del desplazamiento de la planchuela. Para ello se colgaron pesas desde el centro de masa de la planchuela a través de un pequeño rulemán ( a modo de polea de bajo rozamiento ) y se midió el desplazamiento de la planchuela a la altura de su centro de masa. Este estudio se realizó en el caso que las bandas elásticas se encontraban a 5mm de la planchuela. La figura 20 muestra dichos resultados para las constantes elásticas  $k$  correspondiente a la planchuela, y  $k'$  correspondiente a la suma de los efectos de  $k$  y de las bandas elásticas.

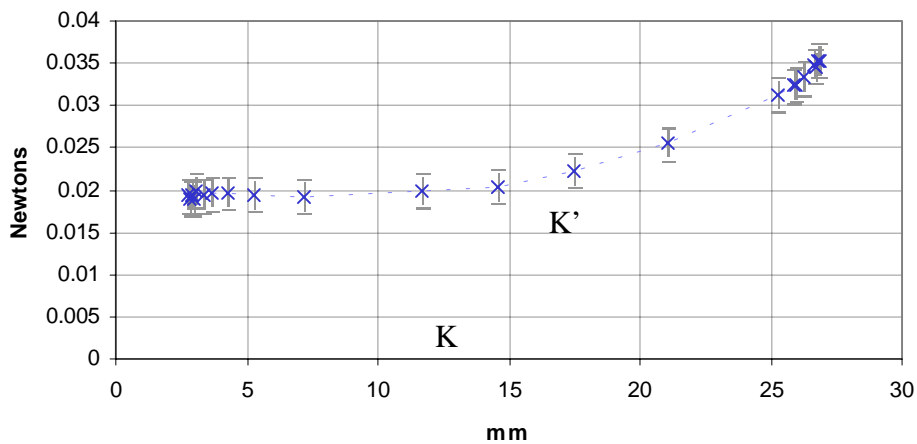
Otro punto crítico en esta experiencia era naturaleza de la fuerza magnética impulsora de este dispositivo estudiado. En los fundamentos teóricos, dijimos que para la configuración de bobinas utilizadas, podíamos asegurarnos una fuerza constante para cada corriente fija en un rango de alrededor de 15mm a cada lado de la planchuela. Lo que hicimos para comprobar dicha afirmación , fue graficar  $F_0$  versus el desplazamiento a partir de la ecuación (7) para lo cual necesitamos el valor de  $k_1$  de la figura 19, la masa de la planchuela ( $m=0,16$  kg) y el coeficiente viscoso  $b$  proveniente del rozamiento interno entre las distintas capas del material. Este último parámetro se obtuvo a través del coeficiente de amortiguación  $\delta$ , que a su vez se halló a partir de ajustar la evolución libre de la planchuela registrada con la fotocelda. (recordemos que  $b=2m\delta$ ).

El gráfico obtenido es el del figura 21, donde se aprecia la variación de  $F_0$  con los desplazamientos( para los desplazamientos negativos se obtiene la extensión par de este gráfico)

Como se puede observar, hasta los 15mm aproximadamente,  $F_0$  se mantiene constantemente igual a unos 0,02 N como se esperaba. A partir de allí, el valor de  $F_0$  aumenta (de igual manera para desplazamientos hacia una u otra bobina) llegando a valer casi el doble para amplitudes de alrededor de la alcanzada por nuestro oscilador en el caso de resonancia lineal.



**Figura 20** Gráfica de la fuerza restitutiva no lineal presente en la experiencia. Se obtuvieron a través de sendas regresiones lineales los valores de  $k=7.2\pm 0.5\text{ N/m}$  y  $k'=43\pm 1\text{ N/m}$ .



**Figura 21** Se observa la variación del módulo de la fuerza magnética aplicada en función del desplazamiento. Fuera del rango lineal (hasta los 15mm)  $F_0$  aumenta paulatinamente su valor.

Este efecto no deseado, no altera el resultado conceptual de las experiencias realizadas tal como se pudo observar de los distintos gráficos obtenidos a lo largo de este informe. Sin embargo, esta variación de  $F_0$  fuera del rango central, provocaba que la señal recogida por la fotocelda se fuera apartando de una señal puramente senoidal y se deformara de acuerdo a la dependencia encontrada de  $F_0$  con el desplazamiento. Se observaban

máximos más agudos y mínimos más suavizados en la señal recogida por la fotocelda, con la aparición lógica de armónicos en el espectro de frecuencias de la señal.

#### **IV.- CONCLUSIONES**

El montaje realizado para la experiencia permitió estudiar con relativa facilidad las características de un sistema no lineal, apelando a un arreglo experimental de fácil armado y de gran versatilidad. La confiabilidad de los resultados obtenidos es altamente repetible en el tiempo, lo cual lo hace doblemente atractivo.

La observación de los fenómenos no lineales fue evidente a partir de los barridos realizados. La semejanza de la fuerza restitutiva con la propuesta por Duffing, puede ser mejorada agregando pares adicionales de bandas elásticas a intervalos bien definidos.

Una segura mejora para este dispositivo es la de poder proveerse de un generador de onda de bajas frecuencias pero que pueda proveer mayor corriente a las bobinas. En nuestra experiencia, la corriente circulante por cada bobina no podía superar los 30mA con el generador utilizado.

De haber contado con dicho generador, hubiera podido separar aún más las bobinas, lo cual hubiera aumentado considerablemente la amplitud de las oscilaciones, siendo más evidentes los efectos no lineales aún sin la presencia de las bandas elásticas.

Por otro lado, el disponer de fuentes más potentes hubiera acercado la posibilidad de observar algún fenómeno caótico, aunque creemos que este tipo de fenómeno tendría más que ver con poder dominar el instante preciso en que la frecuencia de excitación es modificada y al mismo tiempo poder conocer en ese mismo momento el desfase entre las señales involucradas. Al haberse producido estos cambios de frecuencia en forma manual, creemos difícil la oportunidad de observar caos en nuestro sistema oscilador.

Otra mejora factible de poder realizarse es la de optimizar la posición entre las bobinas de acuerdo al criterio mencionado en los fundamentos teóricos.

Es menester destacar asimismo, que difícilmente hubiéramos podido hacer funcionar el dispositivo, sino fuera por los potentes imanes de Neodimio que se utilizaron en este experimento. Las bajas corrientes suministradas a las bobinas no hubieran podido mover la planchuela de no ser por estos pequeños “gran” imanes.

Otra asignatura pendiente fue la de poder simular matemáticamente las soluciones para las ecuaciones de movimiento de nuestro oscilador no lineal y poder comparar los resultados obtenidos a partir de estos cálculos, con los resultados experimentales.

#### **Referencias bibliográficas**

- 1- Murray Spiegel, *Mecánica Teórica* (Ed. McGraw Hill, 1976).Capítulo 4
- 2- Janssen,Serneels,Berdeen, Am. J. Phys. **51**, 655 (1982)
- 3- Paul Lucas, Am J. Phys. **54**, 666 (1986)
- 4- Dorner, Kowalski and Stein, Am J. Phys. **64**, 575(1996)
- 5- Dorner, Kowalski and Stein, Am J. Phys. **63**, 364(1995)
- 6- W.Seto, *Theory and problems of mechanical vibrations* (Ed. McGraw Hill, 1971) Capítulo 9.
- 7- Vernier software [www.vernier.com](http://www.vernier.com)