

F. C. E. y N. - U. B. A.

TRABAJOS DE LABORATORIO II

PROFESOR : DR. J. M. SIMON

DETERMINACION DE ENERGIAS DE FERMI POR
ANIKILACION DE POSITRONES

ALUMNOS : ENRIQUE R. BATISTA (L.U. N° 810/87)
 JUAN J. GALDOS (L.U. N° 1259/87)
 FEDERICO HASENBALG (L.U. N° 684/86)

DIRECTOR : DR. SALVADOR GIL

BUENOS AIRES, MARZO DE 1991

DETERMINACION DE ENERGIAS DE FERMI POR ANILACION DE POSITRONES

Midiendo espectros de correlación angular de la radiación proveniente de la aniquilación positrón - electrón, se halló la energía de Fermi de diversos metales. La distribución de momento de los electrones se aproximó por una parábola, como predice el modelo de electrones libres, mas una componente debida a electrones ligados a los iones. El arreglo experimental nos permitió obtener estos valores con un error del 16%.

E. R. Batista, J. J. Galdos, F. Hasenbalg

Director: Dr. S. Gil TANDAR - C.N.E.A.
Profesor adjuto
Dpto. Física FCEyN

INTRODUCCION

Cuando un par electrón-positrón se aniquila, el resultado es la emisión de dos fotones γ de 511 KeV.† ($= mc^2$). La dirección de salida de los dos fotones está determinada por la conservación de la energía y la cantidad de movimiento. Si el par se encuentra en reposo, los dos fotones serán emitidos a 180° , pero si el par tiene una cierta energía cinética, desde un sistema de referencia fijo al laboratorio,

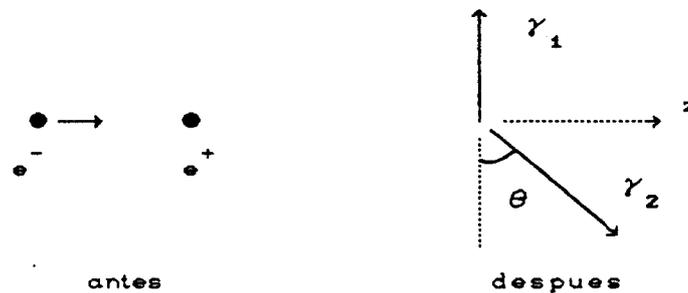


Figura 1

se desviarán de la colinealidad. Esta desviación se relaciona con el impulso lineal del sistema (electrón-positrón) del siguiente modo (ver apéndice 1)

$$\text{sen } \theta = \frac{p}{m c}$$

Distribucion de momento de los electrones :

Si tratamos de describir ciertas propiedades de los metales asumiendo un gas ideal de fermiones, se considera que los electrones de la unión metálica son libres y que interactúan

† En rigor la energía de ambos rayos γ es 511 KeV. solo en el sistema centro de masa y una leve corrección aparece en el sistema del laboratorio debido al corrimiento Doppler.

debilmente entre sí. Cumplen así con las hipótesis de la estadística de Fermi y garantizan de este modo que el sistema se encuentre en equilibrio.

Bajo las hipótesis de un gas de electrones libres a temperatura ambiente ($kT \approx 1/40$ eV.), la distribución de electrones es practicamente la misma que a $0K^{(1)}$, ya que $kT \ll E_f \approx 5$ eV. Es decir, la distribución es uniforme hasta la energía de Fermi por lo que la cantidad de estados en un elemento de volumen del espacio de momentos es proporcional a su volumen $dp_x dp_y dp_z$. También se sabe que los estados de menor energía se encuentran todos ocupados hasta la Energía de Fermi:

$$E_f = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3} = \frac{1}{2} \frac{p_f^2}{m}$$

donde N/V es la densidad de electrones, m la masa del electrón y h la constante de Plank. Como ya se dijo, todos los posibles estados con $E < E_f$ (o sea $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 < p_f^2$) se encuentran ocupados, por lo que el índice de ocupación será:

$$n(p) = 1 - \Theta(p - p_f)$$

donde:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La cantidad de estados entre p_z y $p_z + dp_z$ es:

$$dn_z(p_z) = \rho(p_z) dp_z$$

donde $\rho(p_z)$ se obtiene integrando todos los estados con componente p_z de cantidad de movimiento, o sea,

$$\rho(p_z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n(p) dp_x dp_y$$

$$\rho(p_z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \Theta(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - p_f^2)] dp_x dp_y$$

Para calcular esta integral recurrimos a las coordenadas cilíndricas donde $r = (p_x^2 + p_y^2)^{1/2}$

$$\rho(p_z) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r [1 - \Theta(r^2 + p_z^2 - p_f^2)] dr d\phi = \pi (p_f^2 - p_z^2)$$

de donde finalmente se obtiene:

$$\boxed{dn_z(p_z) = \pi (p_f^2 - p_z^2) dp_z} \quad (1)$$

De esta última expresión se puede obtener la cantidad $\Delta n(p_z)$ de electrones con componente z del impulso entre $p_z - \frac{\epsilon}{2}$ y $p_z + \frac{\epsilon}{2}$ como:

$$\Delta n_z(p_z) = \int dn_z = \int_{p_z - \frac{\epsilon}{2}}^{p_z + \frac{\epsilon}{2}} \pi (p_f^2 - p_z^2) dp_z \quad (2)$$

Cuando un positrón entra a un sólido, antes de aniquilarse se thermaliza ($E_+ \approx kT \ll E_f$), entregando su energía cinética a la red a través de dispersiones con fonones y electrones⁽²⁾. La cantidad de movimiento del sistema electrón-positrón será entonces la que poseía el electrón. Conociendo el ángulo con que salen los fotones, se puede obtener la energía cinética del electrón aniquilado usando $p = m c \text{ sen } \theta$ y de este modo verificar la expresión (1).

En la experiencia, éste fue el método usado para medir P_f . Se bombardeó la muestra con positrones y se midieron para diversos ángulos cuantos pares de fotones se emitían por unidad de tiempo. Así obtuvimos la distribución "cantidad de electrones vs. momento". El ángulo para el cual la cantidad de fotones caía a cero correspondía al P_f .

EXPERIENCIA

Instrumental :

El arreglo experimental se muestra en la figura 2 y

consistió en dos detectores de centelleo operando en coincidencia temporal.

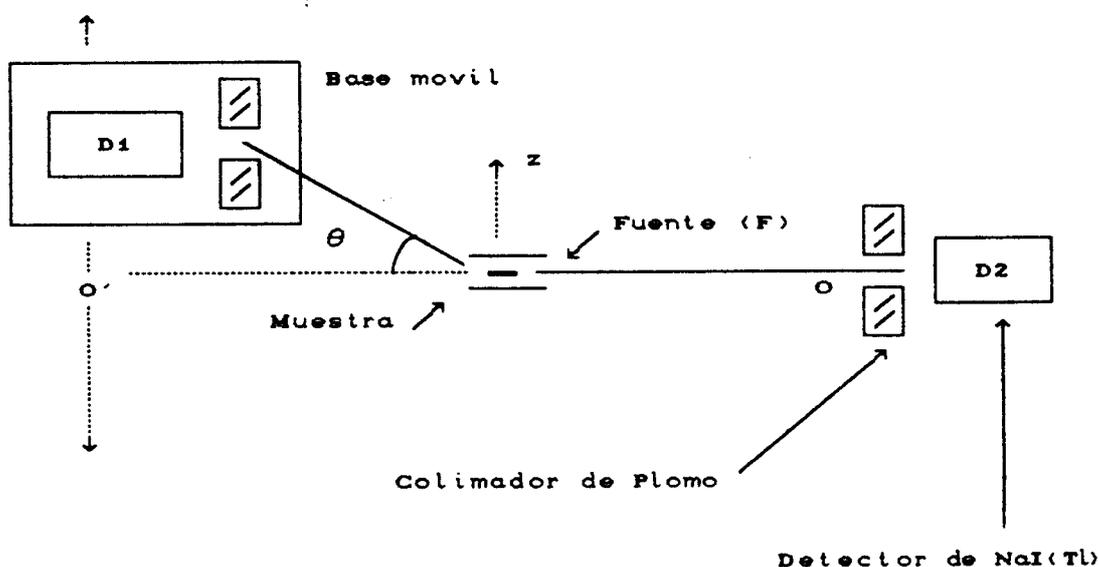


Figura 2 : Arreglo experimental

El detector D1 estaba montado sobre una base móvil, la cual le permitía realizar desplazamientos perpendiculares a la dirección fuente F - detector D2 ($\overline{OO'}$), con una precisión de 0,1 mm. El desplazamiento de D1 y la distancia $\overline{O'F}$ determinaban el ángulo θ . Las mediciones se hicieron a distancias $\overline{O'F}$ de 50 y 100 cm. Con estas geometrías se obtuvieron resoluciones de 2,4 y 1,2 mrad. respectivamente, usando rendijas (colimadores) de 1,2 mm.

Detectores :

Se utilizaron detectores de NaI(Tl) de 2" x 2" y 3" x 3" debido a su alta eficiencia en comparación con los detectores de Ge(Li). La eficiencia intrínseca del detector de 2" x 2" resultó ser de un 18 % mientras que la del de 3" x 3" era de un 30 % a 511 KeV. Ambos detectores fueron usados con colimadores de plomo como se detalla a continuación. El primero de ellos era móvil.

Colimadores :

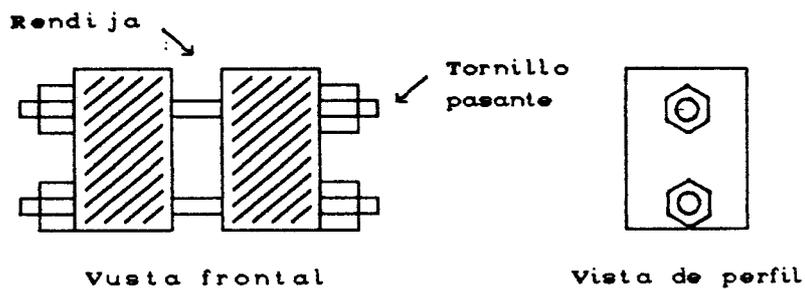


Figura 3 : Detalle del colimador

Los colimadores se construyeron atravesando dos bloques de plomo de 4 cm x 10 cm x 5 cm de profundidad con dos tornillos pasantes que los mantenían rígidos. El ancho de la rendija se fijaba poniendo dos láminas del espesor deseado entre los dos bloques.

Muestra y fuente :

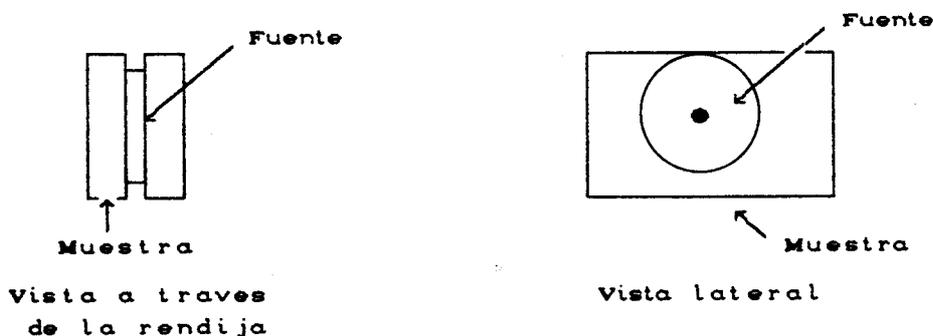


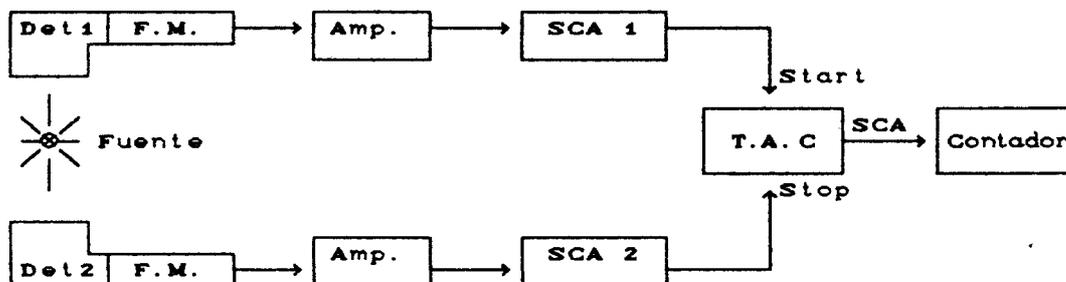
Figura 4 : Ensamble Muestra + Fuente

La fuente era ^{22}Na con una actividad de $27\mu\text{Ci}$, encapsulada entre dos discos de plástico de 0,15 mm. de espesor. La fuente se ubicó entre dos placas de la muestra, maximizando así la cantidad de positrones aniquilados. Como los positrones tenían una energía cinética $T_{\text{media}} \approx 200 \text{ KeV}$. poseían un rango de penetración dentro del material. El estudio de esta penetración (ver apéndice 2) nos permitió elegir 0,3 mm. de espesor de muestra

como suficiente para parar al 80 % de los positrones en todos los casos. Las muestras analizadas[†] fueron Cu (99,95 %), Al (99,47 %), Cd (99,84 %) y Si (99,99 %). La muestra de Cu se midió primero sin ser procesada y luego sometiéndola a un recocido de 24 hs. a 400° C en una atmosfera de aire. Previamente al recocido la muestra se limpió con una solución de NO₃H al 10 % y después de éste se le quitó el óxido con una solución de ácido fórmico al 10% en caliente.

Circuito electrónico :

Esquemáticamente el instrumental utilizado estuvo dispuesto del siguiente modo:



F.M. : tubo fotomultiplicador
 SCA : Single Channel Analyzer
 TAC : Time to Amplitude Converter

Figura 5 : Circuito electrónico

Los detectores estaban seguidos por sus correspondientes fotomultiplicadores. Las señales provenientes de los fotomultiplicadores eran amplificadas antes de entrar a los SCA (single channel analyzer). Los SCA filtraban todas las señales provenientes de los detectores 1 y 2 que no correspondieran a energías de 511 KeV. El TAC (time to amplitude converter) brindaba

[†] por análisis espectrográfico en la división espectroscopía atómica de la CNEA.

un pulso cuya altura era proporcional al tiempo transcurrido entre la llegada de la señal proveniente del SCA1 (Start) y la llegada del pulso del SCA2 (Stop). Típicamente este intervalo de tiempo era del orden del microsegundo. El TAC tenía además un SCA interno que nos permitía, viendo el espectro, eliminar las coincidencias casuales que no provinieran de la misma aniquilación. Además el TAC daba pulsos lógicos que eran registrados en el contador.

Montaje :

La perpendicularidad de la rendija del colimador respecto a la dirección de desplazamiento era crucial para obtener una curva simétrica. Esto se logró con la ayuda de una foto-resistencia y un óhmetro del siguiente modo : se colocó la foto-resistencia detrás de la rendija del colimador móvil y a un metro pusimos una lámpara de 150W. Haciendo avanzar y retroceder la base a lo largo de su línea de desplazamiento se encontró la posición para la cual la intensidad de luz que atravesaba la rendija era máxima. Sabiendo que éste era el centro movíamos la base 1 cm. para cada lado. Según cual de las dos resistencias medidas, 1cm. adelante o 1cm. atrás, fuese mayor, sabíamos en que sentido (horario o antihorario) había que rotar el colimador respecto de la base. Se iteró el proceso hasta obtener simetría. Una vez hecho esto, se alineaba el segundo colimador y la fuente. Ayudándonos con un láser ubicamos ambos colimadores sobre la línea del haz sin mover el colimador móvil previamente ajustado. Consideramos que la rendija estaba paralela al haz cuando la figura de difracción formada en una pared ubicada a 6 metros de la misma era simétrica. La fuente con la muestra se puso en el camino del haz.

Procedimiento :

Debido a que el colimador móvil no se desplazaba a largo de una circunferencia sino que lo hacía en la dirección perpendicular a $\overline{OO'}$, era necesario antes de comenzar una medición, levantar una curva del ancho eficaz del colimador, o sea, la

variación del área del detector que ilumina la fuente (ver figuras 11 y 12). Inicialmente se situaba el colimador en un extremo de la curva para poder desplazar el detector siempre en la misma dirección y así evitar errores debidos al paso muerto del mecanismo. Cada medición consistía en posicionar la rendija en el ángulo a medir y registrar después de un intervalo de tiempo la cantidad de cuentas almacenadas en el contador. Para verificar la estabilidad de la fuente de tensión de los detectores se alimentó con una de las salidas del SCA, un multicanal que registraba en cada canal, por intervalos de 20 segundos, la cantidad de pulsos recibidos (modo Multi Channel Scaler). Este método a su vez permitía en el caso de que hubieran existido fluctuaciones corregir los datos después de medidos.

RESULTADOS

En las tablas y figuras presentadas a continuación se muestran los datos obtenidos, así como las correcciones debidas al hecho de tener en cuenta el ancho eficaz de la rendija.

La aniquilación de los positrones con los electrones más ligados al núcleo da como contribución un fondo no uniforme que puede aproximarse por una distribución gaussiana. En consecuencia los ajustes a los datos experimentales fueron hechos sumándole a la expresión (1) un fondo gaussiano. Para hacer el ajuste se utilizaban primero los puntos obtenidos a ángulos mayores y con estos se obtenía la componente gaussiana. A ángulos grandes no se esperaba contribución de los momentos de los electrones libres por que la energía de los mismos está acotada. Conocida la distribución gaussiana se ajustaba el resto de los datos usando una función gaussiana más la expresión (1), dejando solo los coeficientes de la parábola como parámetros libres.

Tabla 1 : Cadmio

θ (mrad.)	cuentas	cuentas corregidas
-2.87	1484 ± 39	1454 ± 38
-1.98	1692 ± 41	1675 ± 41
-1.08	1989 ± 45	1983 ± 45
-0.19	2145 ± 46	2145 ± 46
0.70	2016 ± 45	2013 ± 45
1.60	1817 ± 43	1805 ± 42
2.49	1523 ± 39	1499 ± 39
3.38	1309 ± 36	1272 ± 36
4.27	1057 ± 33	1011 ± 32
5.17	873 ± 30	820 ± 29
6.06	700 ± 26	645 ± 25
6.95	441 ± 21	398 ± 20
7.85	293 ± 17	259 ± 16
8.74	184 ± 14	160 ± 13
9.63	130 ± 11	111 ± 11
10.52	89 ± 9	75 ± 9
11.42	65 ± 8	54 ± 7

Tabla 2 : Silicio

θ (mrad.)	cuentas	cuentas corregidas
-5.79	669 ± 26	620 ± 25
-4.91	788 ± 28	744 ± 27
-4.04	1132 ± 34	1088 ± 33
-3.16	1321 ± 36	1288 ± 36
-2.28	1551 ± 39	1531 ± 39
-1.40	1911 ± 44	1901 ± 44
-0.53	2066 ± 45	2065 ± 45
0.35	2089 ± 46	2088 ± 46
1.23	1892 ± 43	1885 ± 43
2.11	1715 ± 41	1696 ± 41
2.98	1537 ± 39	1503 ± 39
3.86	1170 ± 34	1128 ± 34
4.74	931 ± 31	882 ± 30
5.61	710 ± 27	660 ± 26
6.49	526 ± 23	480 ± 22
7.37	403 ± 20	360 ± 19
8.25	215 ± 15	189 ± 14
9.12	176 ± 13	152 ± 12
10.00	114 ± 11	97 ± 10

Tabla 3 : Aluminio

θ (mrad.)	cuentas	cuentas corregidas
-12.93	32 ± 6	26 ± 5
-11.21	75 ± 9	62 ± 8
-9.48	174 ± 13	149 ± 12
-7.76	454 ± 21	402 ± 19
-6.03	846 ± 29	780 ± 27
-5.17	1051 ± 32	987 ± 30
-4.31	1376 ± 37	1315 ± 35
-3.45	1867 ± 43	1813 ± 42
-2.59	2036 ± 45	2002 ± 44
-1.72	2442 ± 49	2423 ± 49
-0.86	2501 ± 50	2496 ± 50
-0.86	2608 ± 51	2603 ± 51
0.00	2589 ± 51	2589 ± 51
0.86	2398 ± 49	2393 ± 49
1.72	2075 ± 46	2059 ± 45
2.59	1740 ± 42	1711 ± 41
3.45	1490 ± 39	1447 ± 37
4.31	1165 ± 34	1114 ± 32
5.17	899 ± 30	844 ± 28
6.03	591 ± 24	545 ± 22
6.90	441 ± 21	398 ± 19
7.76	294 ± 17	261 ± 16
8.62	210 ± 14	183 ± 13
9.48	116 ± 11	99 ± 10
10.34	80 ± 9	67 ± 8
11.21	52 ± 7	43 ± 7
12.93	34 ± 6	27 ± 5
14.65	26 ± 5	20 ± 5

Tabla 4 : Cobre

θ (mrad.)	cuentas	cuentas corregidas
-6.58	147 ± 12	134 ± 12
-5.64	198 ± 14	182 ± 14
-4.70	446 ± 21	416 ± 20
-3.76	480 ± 22	457 ± 21
-3.29	530 ± 23	510 ± 23
-2.82	666 ± 26	647 ± 25
-2.35	732 ± 27	718 ± 27
-1.88	834 ± 29	824 ± 29
-1.41	865 ± 29	859 ± 29
-0.94	936 ± 31	933 ± 31
-0.47	978 ± 31	977 ± 31
0.00	996 ± 32	996 ± 32
0.47	975 ± 31	974 ± 31
0.94	930 ± 30	927 ± 30
1.41	884 ± 30	878 ± 30
1.88	817 ± 29	807 ± 28
2.35	782 ± 28	767 ± 28
2.82	674 ± 26	655 ± 26
2.82	684 ± 26	665 ± 26
3.29	628 ± 25	604 ± 25
3.76	477 ± 22	454 ± 21
4.23	367 ± 19	345 ± 19
4.70	359 ± 19	335 ± 18
5.17	308 ± 18	285 ± 17
5.64	219 ± 15	202 ± 14
6.11	183 ± 14	168 ± 13
6.58	162 ± 13	148 ± 12
7.05	146 ± 12	133 ± 12
7.99	134 ± 12	120 ± 11
8.93	77 ± 9	68 ± 8
10.81	46 ± 7	40 ± 6

Tabla 5 : Cobre recocido

θ (mrad.)	cuentas	cuentas corregidas
-9.84	16 ± 5	14 ± 4
-8.89	16 ± 5	14 ± 4
-7.93	30 ± 7	27 ± 5
-6.98	51 ± 8	46 ± 7
-6.03	54 ± 8	49 ± 7
-5.08	90 ± 10	83 ± 9
-4.12	146 ± 13	137 ± 12
-3.17	160 ± 13	154 ± 12
-2.22	189 ± 14	185 ± 14
-1.27	240 ± 16	239 ± 15
-0.32	260 ± 17	260 ± 16
0.64	260 ± 17	260 ± 16
1.59	214 ± 15	212 ± 15
2.54	180 ± 14	176 ± 13
3.49	142 ± 12	135 ± 12
4.45	125 ± 12	117 ± 11
5.40	80 ± 10	74 ± 9
6.35	74 ± 9	68 ± 8
7.30	41 ± 7	37 ± 6
8.26	28 ± 6	25 ± 5
9.21	25 ± 6	22 ± 5
10.16	20 ± 6	17 ± 4

Los errores en el número de cuentas se estimaron, a partir de consideraciones estadísticas usuales para este tipo de procesos, como la raíz cuadrada del número de cuentas.

En la tabla 6 figuran las distancias a las cuales se realizaron las distintas mediciones así, como la duración de las mismas en cada posición.

Tabla 6

	tiempo de medición (min.)	distancia \overline{OF}^\ddagger (cm.)
Si	30	50
Al	30	50
Cd	30	50
Cu	60	100
Cu [†]	90	100

† : cobre recocido

‡ : ver figura 2

En los gráficos siguientes se muestran los datos experimentales junto con sus ajustes correspondientes, figuras 6 a 10.

Figura 6 : Aluminio

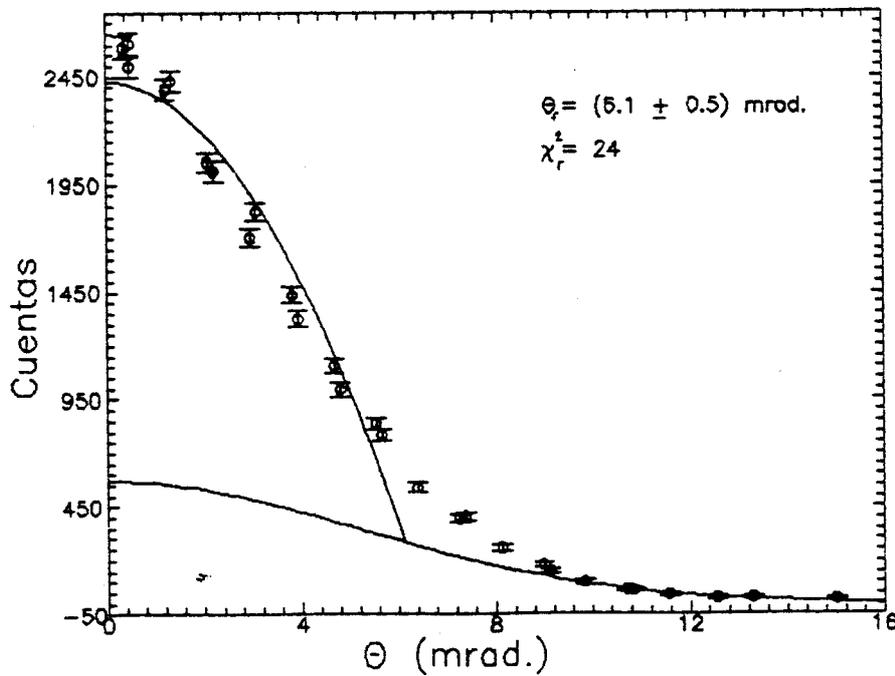


Figura 7 : Cadmio

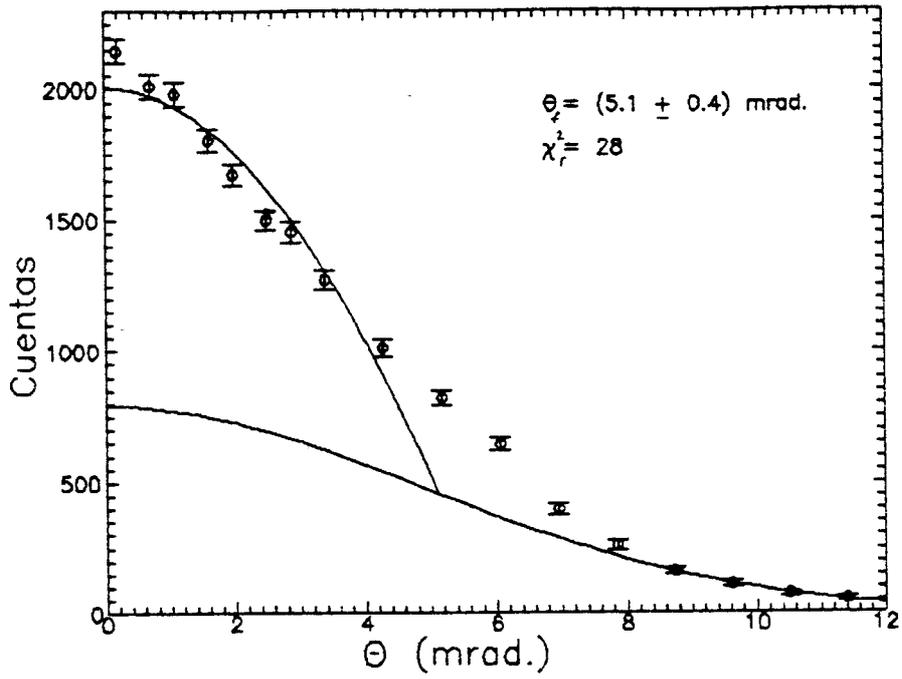


Figura 8 : Cobre

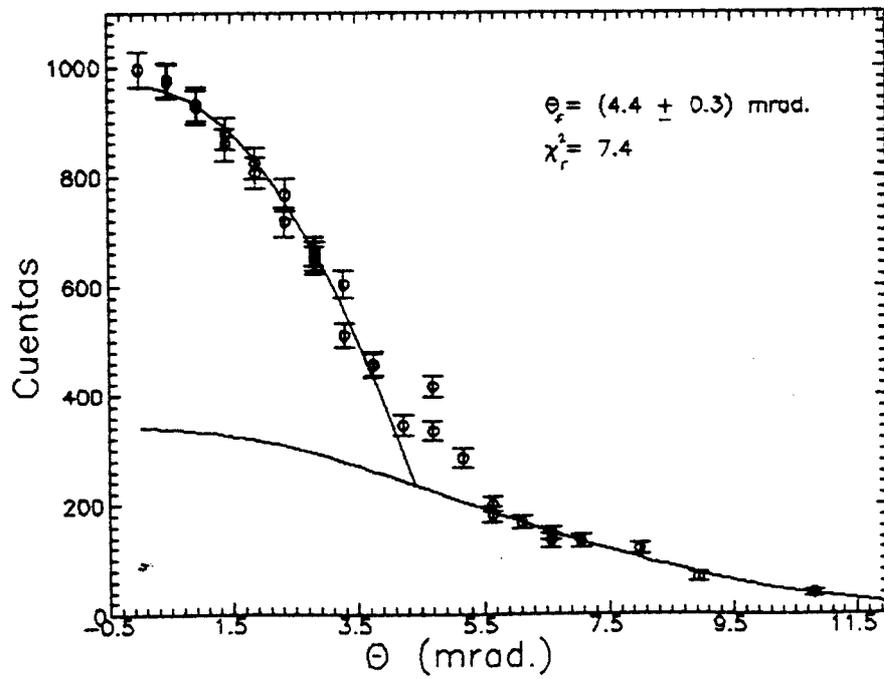


Figura 9 : Cobre recocido

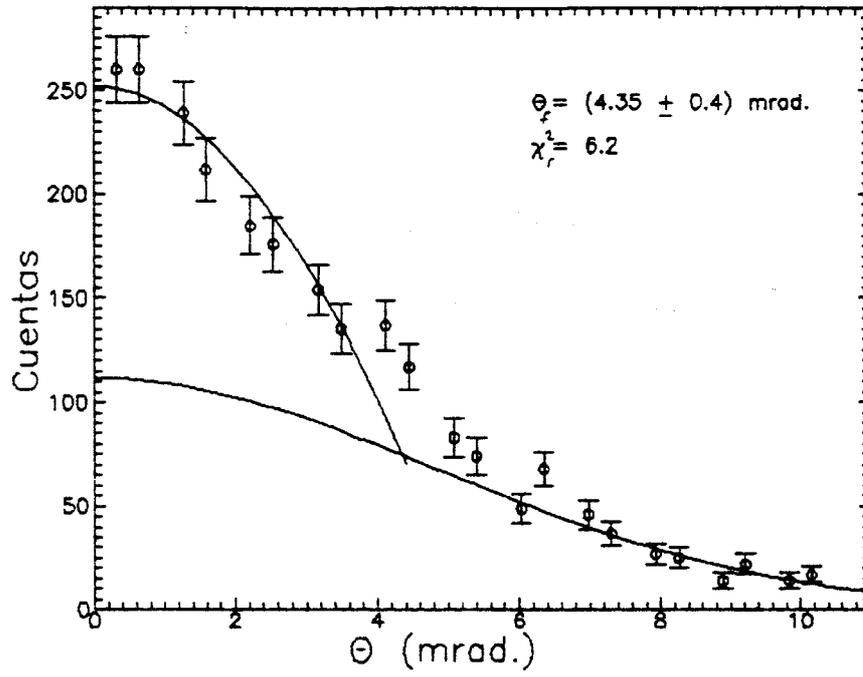


Figura 10 : Silicio

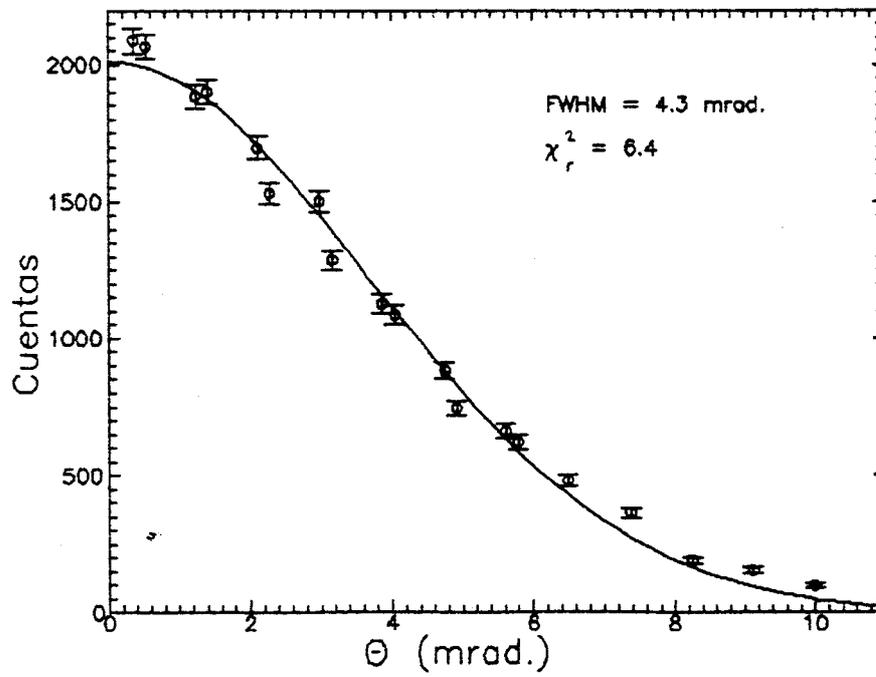


Figura 11 : Curva de ancho eficaz a 50 cm.

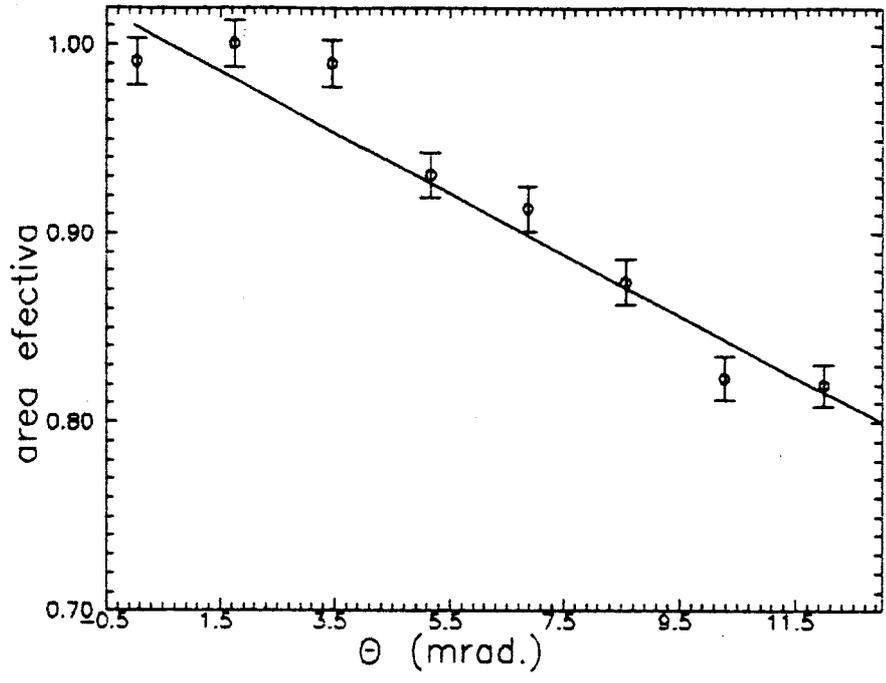
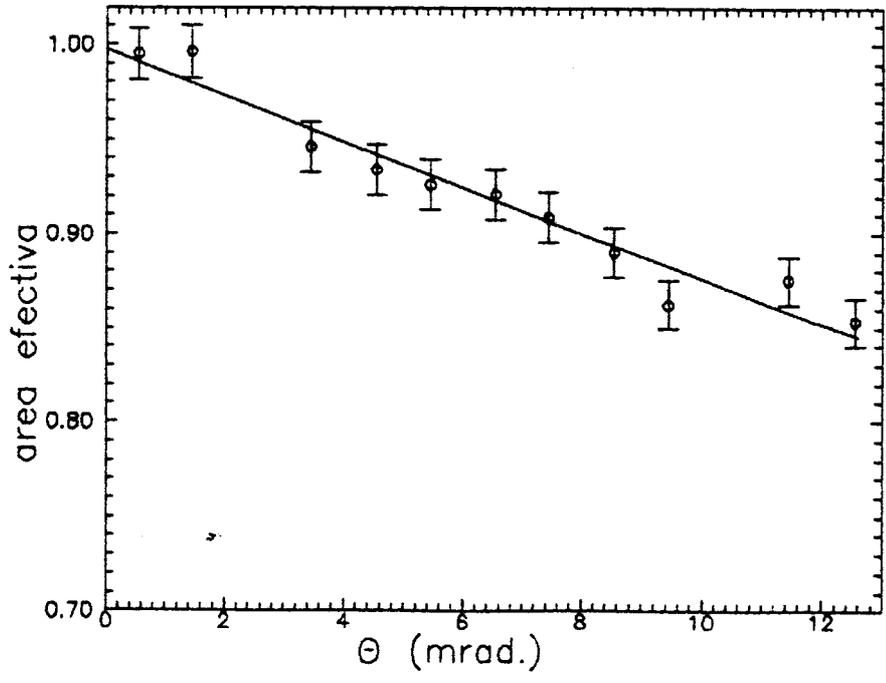


Figura 12 : Curva de ancho eficaz a 1 m.



Se hizo una medición con una muestra de Silicio para poder indagar si las distribuciones de momento para un semiconductor mostraban diferencias significativas comparadas con las distribuciones de los metales. Observamos que si existen diferencias apreciables, no pudieron ser detectadas dentro de la resolución del experimento.

Como puede apreciarse en las figuras los datos experimentales se desvían de las predicciones del modelo en la región cercana a θ_f . Esto se debe a la resolución del sistema y por ende no todos estos puntos fueron considerados en los ajustes. Era por lo tanto difícil seleccionar los datos más apropiados y esto generaba distintos conjuntos de parámetros para los cuales el ajuste era físicamente aceptable. La incerteza en el θ_f fue calculada estudiando la variación porcentual de los distintos θ_f obtenidos de estos conjuntos. Se estimó la variación de θ_f en un 7,5 %.

Resumimos en la tabla 7 los valores que obtuvimos junto con valores teóricos y experimentales obtenidos por otros autores.

Tabla 7 : Comparacion de los resultados obtenidos con el de otros autores.

Metal	θ_f (mrad.)	E_f (eV.)	θ_f teo.	θ_f ‡
Al	$6,1 \pm 0,5$	$9,5 \pm 1,6$	6,77	$6,2^{(9)}$
Cd	$5,1 \pm 0,4$	$6,6 \pm 1,0$	5,40	
Cu	$4,4 \pm 0,4$	$4,9 \pm 0,9$	5,23	$5,2^{(4)}$
Cu [†]	$4,35 \pm 0,4$	$4,8 \pm 0,9$	5,23	$5,2^{(4)}$

† : Cobre recocido.

θ_f teo. : valor teórico de θ_f (Ref. 5).

‡ : valores de θ_f experimentales obtenidos por otros autores.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos, si bien no muestran una perfecta correlación con el modelo de una parábola sobre un fondo gaussiano, presentan un acuerdo razonable. Las discrepancias observadas se pueden entender como debidas a dos causas principales : a) el ancho finito del colimador integra la densidad de momentos y en consecuencia el empalme entre la parábola y la gaussiana pierde nitidez; b) la distribución de momentos no es bien descripta por un modelo que prediga un cambio discontinuo de pendiente en θ_f .

Para una muestra tratada termicamente, se debería observar que la distribución de momentos se angosta⁽²⁾. Observamos que la precisión del experimento no permitió apreciar diferencias entre una muestra tratada térmicamente y otra que no fue sometida a tratamiento alguno (ver figuras 8 y 9).

Intentamos corregir el θ_f teniendo en cuenta el ancho finito del colimador y utilizando la expresión (2). Verificamos que sin considerar el ancho del colimador se subestima en un 1 % el valor de θ_f . No obstante, este valor queda incluido en los errores ya mencionados en los resultados, que son del orden del 7,5 %.

Como comentario final, debemos remarcar que los errores en las energías de Fermi son grandes (~ 16 %). De contar con una fuente más intensa (aprox. 200 μ Ci.) podría mejorarse la resolución del sistema. Con dicha actividad y mediciones de 30 min. se obtendría, según nuestras predicciones, una resolución de 0,5 mrad. con 2500 cuentas a 0°. Estas son las resoluciones típicas usadas en correlaciones angulares unidimensionales⁽²⁾. Queda claro que el experimento permite obtener valores aproximados de las energías de Fermi para distintos metales, aunque no es apto para estudios detallados de la distribución de momentos.

Queremos hacer llegar nuestro agradecimiento al Dr. A. Saul por sus valiosas sugerencias, así como al Lic. J.C. Furnari, por habernos facilitado las fuentes de ²²Na. Por último agradecemos a la Dra. M. Benyacar, por su colaboración en el tratamiento y análisis de las muestras.