

# Máquina de Atwood con masa variable

*Fernando Meira y Leonardo Casal*  
[fer\\_akade@yahoo.com.ar](mailto:fer_akade@yahoo.com.ar), [leoncasal@hotmail.com](mailto:leoncasal@hotmail.com)

Universidad Favaloro, Facultad De Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales  
Laboratorio de Física 1- 2005

## Resumen

En este informe desarrollamos un modelo que caracteriza el comportamiento de una máquina de Atwood cuando una de sus masas varía en el tiempo. Caracterizamos independientemente este flujo de masa, en nuestro caso un sólido granular (la arena). También medimos la fuerza de rozamiento, para finalmente comparar los datos experimentales con el modelo propuesto.

## Introducción

Nuestro objetivo será desarrollar un modelo que describa el comportamiento de una máquina de Atwood cuando una de sus masas varía en el tiempo y comparar los datos obtenidos experimentalmente

Los sistemas de masa variable han sido estudiados formalmente desde el siglo XVI, siendo Galileo uno de los principales contribuyentes. Actualmente los experimentos realizados sobre el tema no caracterizan independientemente el cambio de masa en el sistema, es decir utilizan resultados obtenidos anteriormente en otros experimentos.

En nuestro caso utilizamos un sólido granular, arena, principalmente porque podemos considerar su cambio de masa (flujo) en el tiempo constante. Determinamos experimentalmente este flujo en el apéndice 1.

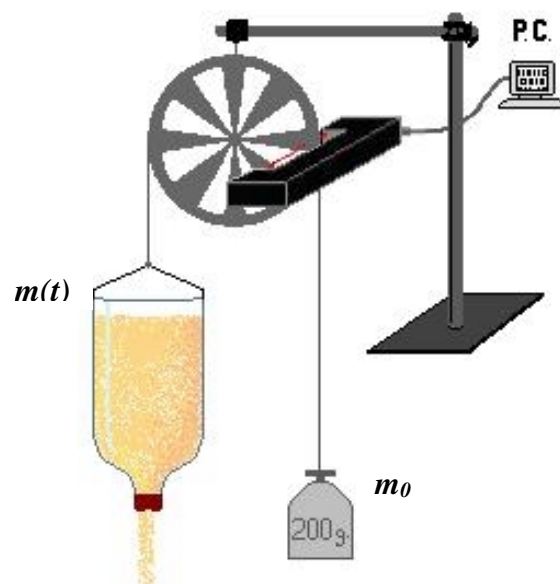
Con el flujo ya estudiado, utilizando la segunda ley de Newton desarrollamos una expresión para la aceleración del sistema, obtenida en el apéndice 2.

$$a(t) = \frac{m(t)g - m_0g - F_f}{m(t) + m_0 + I/r^2}$$

Por el resultado obtenido en el apéndice 3, debemos considerar la fuerza de rozamiento, aunque sea de un orden pequeño en algunos instantes es del orden de las otras fuerzas.

## Método experimental

Para realizar el experimento armamos una máquina de Atwood como se muestra en la figura 1.



**Figura 1** Máquina de Atwood montada para el experimento

Nuestro sistema consiste en 2 masas atadas a los extremos de un hilo inextensible de masa despreciable colgado a una polea fija. Una de las masas  $m_0$  es una pesa de plomo de  $(200.0 \pm 0.1)$  gramos medida con una balanza electrónica. La otra masa  $m(t)$  es una botella rellena de arena tamizada, para eliminar impurezas y obtener un flujo más uniforme, que tiene una masa inicial  $m_i$  de  $(235.0 \pm 0.1)$  gramos. Una tapa con un orificio de forma circular de diámetro  $(12.06 \pm 0.02)$  mm medido con un calibre permite el escape de la arena.

Cuando liberamos el sistema la masa mayor  $m(t)$  comienza a descender mientras que a través del orificio cae arena. El diámetro del orificio de la tapa fue elegido para que el flujo de arena sea suficientemente rápido permitiéndole a la botella ser más liviana que la pesa antes de que ésta golpee contra la polea.

A medida que la polea gira un fotointerruptor conectado a la PC registra el intervalo de tiempo  $\Delta t$  de una interrupción hasta la próxima, provocada por el movimiento de las aspas. Este tiempo  $\Delta t$  es el intervalo que tarda la polea en girar un cierto ángulo  $\Delta \vartheta = 36^\circ$  esto se debe a que los intervalos que mide el fotointerruptor en una vuelta son 10, un aspa y un espacio entre aspas. Obtuvimos el intervalo de posición lineal  $\Delta x$  multiplicando el intervalo de posición angular  $\Delta \vartheta$  por el radio de la polea, que mide  $(25.00 \pm 0.02)$  mm.

Con los intervalos de tiempo  $\Delta t$  y los intervalos de posición  $\Delta x$  determinamos la velocidad experimental.

A partir de la expresión para la aceleración  $a(t)$  deducida en el apéndice 2 escribimos:

$$a(t) = \frac{m(t)g - m_0g - F_f}{m(t) + m_0 + I/r^2} .$$

donde  $g$  es la aceleración gravitatoria,  $I$  y  $r$  son el momento de inercia y radio de la polea, y  $F_f$  es la fuerza de fricción de la polea en nuestro sistema. Tomamos  $I = 0.5 \cdot m_p \cdot r^2$ , donde  $m_p$  es la masa de la polea que vale  $(5,5 \pm 0,1)g$ .

En el apéndice 1 obtenemos la dependencia lineal de  $m(t)$  con el tiempo:

$$m(t) = m_i - \lambda \cdot t$$

donde  $m_i$  es la masa inicial de  $m(t)$  y tiene un valor de  $(235,0 \pm 0,1)g$ ,  $\lambda$  es la velocidad de pérdida de masa que depende del orificio de la tapa, y para nuestro caso vale  $37,25 \text{ g/s}$ . Tomamos flujo como constante a lo largo del experimento, despreciando la aceleración vertical del sistema.

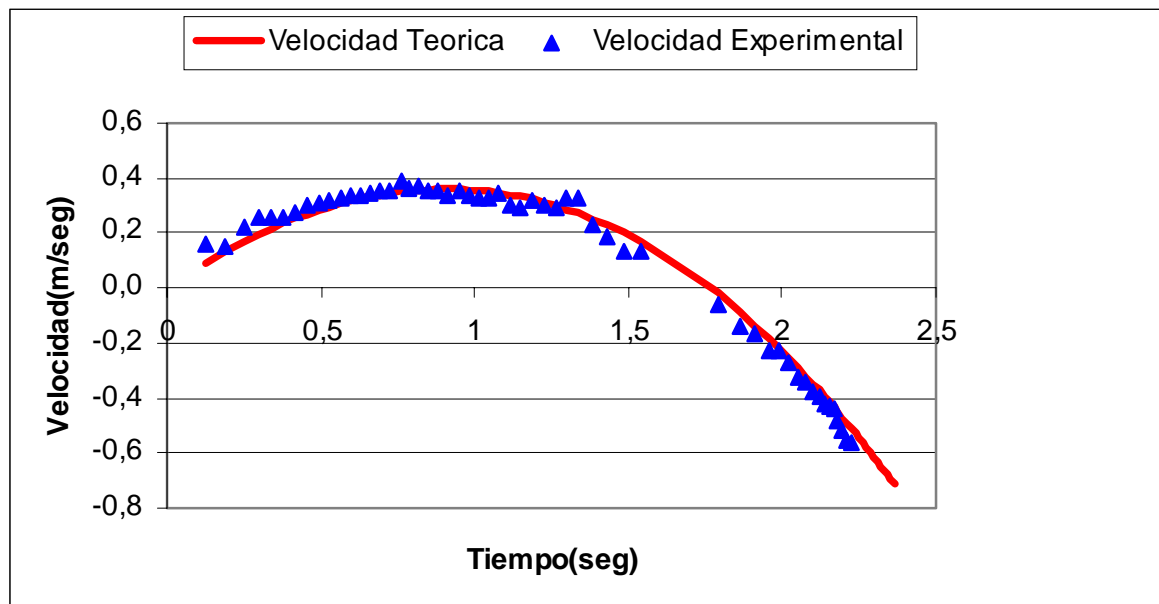
Consideramos que la fuerza de rozamiento es constante a lo largo del experimento. Calculamos su valor en el apéndice 3,

$$F_f = 0.0038N$$

Integrando la aceleración  $a(t)$  obtenemos la velocidad modelada  $v(t)$ , que podemos comparar gráficamente con aquella obtenida en el experimento, luego de haber especificado todos los parámetros.

## Resultados y Discusión

En el siguiente gráfico presentamos la velocidad obtenida experimentalmente y la velocidad del modelo:



**Figura 2** Gráfico de velocidad teórica y experimental versus tiempo

Observamos un buen ajuste de la velocidad modelada con la velocidad experimental.

En la velocidad máxima tenemos aceleración cero, por lo tanto las masas  $m(t)$  y  $m_0$  son iguales no precisamente en este momento, sino en un tiempo cercano a éste, debido a la fuerza de fricción.

También notamos que en una región cercana a la velocidad nula tenemos poca cantidad de mediciones, éste es el momento en que las masas se detienen y cambian el sentido de su velocidad.

## Conclusión

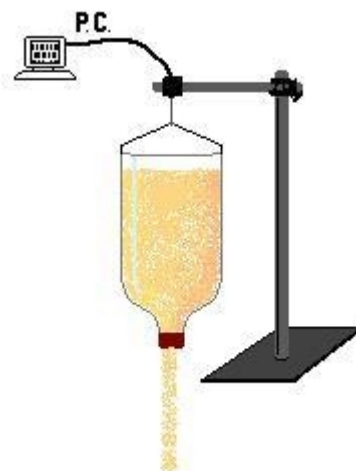
Pudimos observar que el modelo propuesto para caracterizar el comportamiento de la máquina de Atwood ajusta con los datos experimentales pudiendo concluir obtuvimos representación consistente del sistema estudiado y paralelamente volvimos a corroborar uno de los paradigmas de la física, las leyes de Newton.

Dejamos como interrogante para un futuro experimento cuál sería el comportamiento del sistema en el caso de utilizar un fluido en vez de arena, donde el flujo será mucho más complicado y la aproximación que hicimos respecto al flujo de arena tomándolo como constante no sería correcto en ese caso

## Apéndice A

**Determinación de flujo:** Aquí determinamos experimentalmente la variación de la masa en el tiempo del cuerpo utilizado en el experimento. En nuestro caso se trata de flujo de arena, un sólido granular.

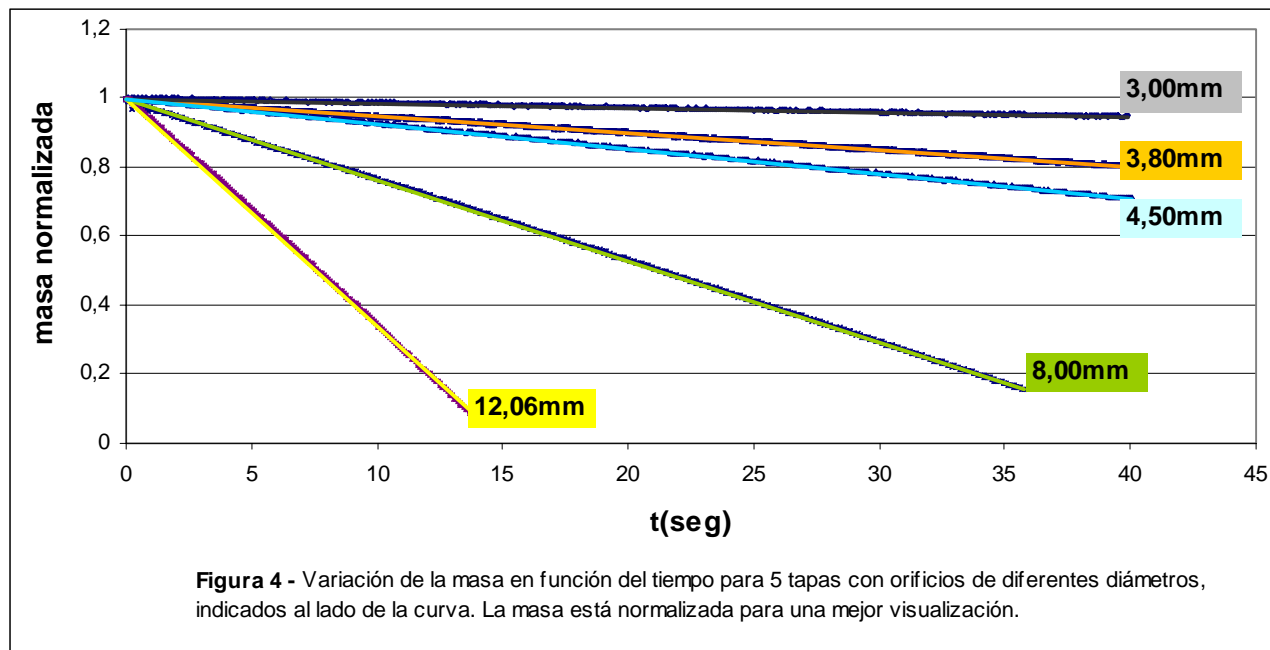
**Método experimental:** Como muestra la figura 3, una botella con arena tamizada para minimizar las impurezas está colgada de un sensor de fuerzas conectado a una PC. Una tapa con un orificio de diámetro  $(3.00 \pm 0.02)$  mm permite el escape de arena. La única fuerza presente para el sensor es la fuerza peso de la botella, considerando que la arena sale con velocidad nula. Registramos la variación de la masa en un período de 40 segundos aproximadamente.



**Figura 3** Con una botella colgada de un sensor de fuerzas determinamos la variación de masa.

Repetimos este procedimiento con 5 orificios de distintos diámetros, éstos contenían diferentes masas iniciales para que el intervalo de tiempo hasta que la arena se acabara sea suficientemente largo. Al comparar los datos normalizamos la masa de las mediciones para tener una mejor visualización de los datos.

**Resultados:** Construimos el siguiente gráfico:



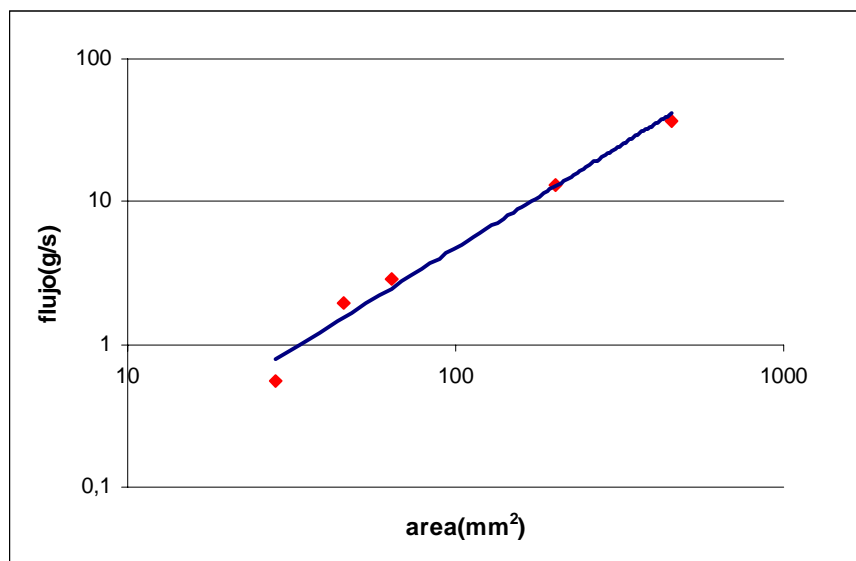
Observamos que se tratan de rectas, independientemente del diámetro de los orificios utilizados. Podemos ajustar la variación de masa  $m(t)$  en función del tiempo a la siguiente función:

$$m(t) = m_i - \lambda \cdot t$$

donde  $m_i$  es la masa inicial de arena,  $t$  es el tiempo y  $\lambda$  es la velocidad de la pérdida de masa obtenida a partir de las mediciones.

Para la máquina de Atwood de masa variable utilizamos la tapa con un orificio de 12.06mm cuya valor de  $\lambda$  es **37,25 g/s**.

Si también deseamos observar la relación de la velocidad de pérdida de masa (o flujo) de cada orificio en función del área del orificio obtenemos el siguiente gráfico:



**Figura 5** – Gráfico de la variación de masa de cada orificio en función del área del orificio. Los ejes están en escala logarítmica, para poder distinguir una recta.

Observemos que al representar los ejes en escala logarítmica obtenemos una recta con un buen ajuste, es decir existe una relación potencial entre las variables en cuestión.

**Conclusión:** Afortunadamente éste era el resultado esperado ya que según Yersel<sup>3</sup> la velocidad de pérdida de masa de un sólido granular cuando el tamaño de las partículas que lo forman es mucho menor que el área por la que escapan del cuerpo y la única fuerza presente es la gravitatoria, guarda la siguiente relación:

$$\frac{dm}{dt} = k\rho\sqrt{g}A^{\frac{5}{4}}$$

donde  $k$  es una constante,  $g$  es la aceleración gravitatoria,  $\rho$  la densidad del sólido granular y  $A$  el área del orificio.

Caracterizamos el cambio de masa de la tapa utilizada en nuestro sistema y obtuvimos el flujo como  $\lambda = 37,25 \text{ g/s}$ .

## Apéndice 2

### Desarrollo teórico de la aceleración

A partir de las Leyes de la dinámica desarrollamos un modelo para el movimiento de la máquina de Atwood. Como consideramos que la arena sale con velocidad relativa inicial nula, no necesitamos introducir al impulso a nuestro problema.

Realizamos un diagrama de cuerpo libre, y consideramos la fuerza gravitatoria  $F_v$  y  $F_0$  que actúan sobre la masa variable  $m(t)$  y la masa fija  $m_0$  respectivamente, pero tienen sentido opuesto. También consideramos una fuerza de rozamiento  $F_f$  debido a la polea utilizada que se

opone al movimiento. La masa total del sistema  $M$  es  $M = m(t) + m_0 + I/r^2$  donde  $I$  y  $r$  son el momento de inercia y el radio de la polea.

Escribimos la suma de todas estas fuerzas sobre el sistema como:

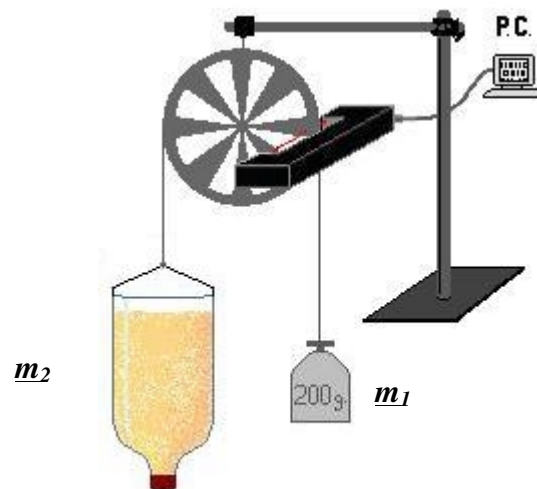
$\sum F = F_v - F_0 - F_f$ , reemplazando las fuerzas mencionadas,  $Ma = m(t)g - m_0g - F_f$ , donde  $a$  es la aceleración del sistema. Despejando nuestra incógnita obtenemos:

$$a(t) = \frac{m(t)g - m_0g - F_f}{m(t) + m_0 + I/r^2}$$

### Apéndice 3

**Fuerza de Rozamiento:** En este apéndice determinamos experimentalmente la fuerza de fricción que se opone al movimiento del sistema.

**Método experimental:** Para este experimento tomamos 2 masas  $m_1, m_2$  constantes conocidas, siendo  $m_1$  mayor a  $m_2$ . Armamos una máquina de Atwood utilizando la polea y el hilo inextensible y de masa despreciable como muestra la figura 6



**Figura 6** Máquina de Atwood con masas constantes utilizada para la medición independiente de la fuerza de rozamiento

.Dejamos el sistema en movimiento y a partir del fotointerruptor conectado a la Pc tomamos las mediciones Estas mediciones eran los intervalos de tiempo  $\Delta t$  que tardaba la polea en moverse un cierto ángulo  $\Delta\vartheta = 36^\circ$  (esto se debe a que los espacios en el que toma la medición el fotointerruptor son 10).

A partir de estos datos hicimos el cociente de  $\Delta\vartheta/\Delta t$  para obtener la velocidad angular a la cual la multiplicamos por el radio de la polea para finalmente obtener la velocidad lineal de las masas en función de  $t$ . Graficando  $v$  en función de  $t$  estimamos a partir de cuadrados mínimos el valor de la aceleración que resulta de la pendiente de la recta.

Este procedimiento lo repetimos 4 veces variando la masa 2 y obteniendo para cada realización su correspondiente aceleración.

Planteando las ecuaciones de cuerpo libre obtuvimos la siguiente ecuación de movimiento para una maquina de Atwood de masas constantes:

$$(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2})a = (m_1 - m_2)g - F_r$$

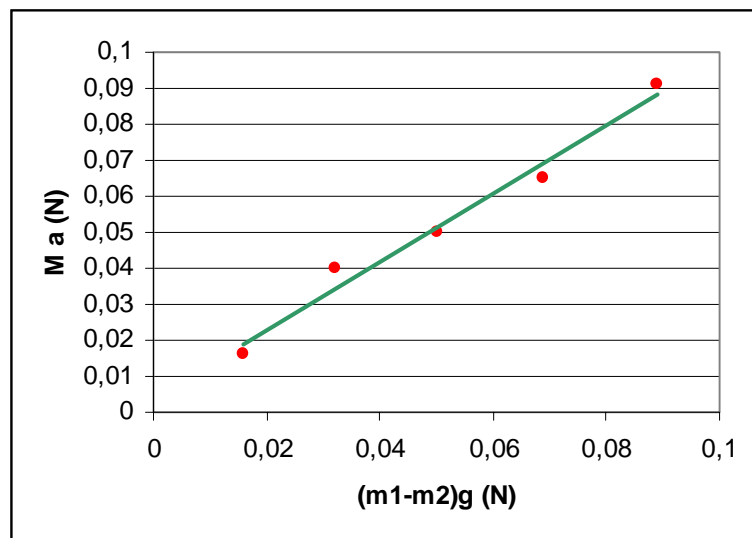
donde  $g$  es la aceleración gravitatoria,  $a$  la aceleración del sistema,  $F_r$  la fuerza de rozamiento debido a la polea,  $I$  es el momento inercia de la polea que lo consideramos como  $0.5m_p R^2$ .

Podemos considerar  $M = m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}$  para obtener finalmente

$$Ma = (m_1 - m_2)g - F_r$$

A partir de la ultima ecuación graficamos para cada grupo de masas  $Ma$  en función de  $m_1 - m_2$  obteniendo de la pendiente de la recta la aceleración de la gravedad y de la ordenada al origen la fuerza de rozamiento.

## Resultados



**Figura 7** Gráfico del cual se obtiene la fuerza de rozamiento

Obtuvimos finalmente una fuerza de fricción de 0.0038 N y una gravedad de 9.7 m/s por lo que podemos considerar que el ajuste realizado es bueno. Con respecto el valor de la fuerza de rozamiento no es despreciable en el sistema que consideramos. También hacemos una



importante consideración al tomar esta fuerza como constante en el tiempo gracias al gráfico obtenido en la figura x

**Conclusión:** Hemos caracterizado la fuerza de rozamiento como  $F=0+.0038$  N considerándola también constante durante el experimento.

## Bibliografía

- 1- S. Gil, J. Flores, G. Solovey, “Flow of Sand and a variable mass Atwood machine”, *American Journal Physics*, **71** (7) p 715-720, (2003)
- 2- S. Gil ,E. Rodríguez, *Física Re-creativa*, Prentice Hal, Buenos Aires, 2001,y [〈www.fisicarecreativa.com〉](http://www.fisicarecreativa.com)
- 3- Metin Yersel, “The Flow of Sand”, *Physics Teachers*, **38** (5), p 290-291 (2000)