

Estudio Experimental de la Ecuación de Bernoulli

Verónica Cecilia Delfosse, Alejandra Gural

verococo14@hotmail.com, azul-a2002@ciudad.com.ar

Turno: Jueves 17.30hs. a 21.30hs – Curso de física I – Universidad de Gral. San Martín.

RESUMEN

Se estudió el drenaje de un recipiente cilíndrico a partir de una generalización del experimento de Torricelli. Los datos experimentales pudieron ser explicados a partir de la ecuación de Bernoulli, suponiendo la existencia de fuentes de disipación de energía. Además se puso a prueba la posibilidad de que los fluidos sigan las mismas leyes que las partículas sólidas. Y por otro lado se verificó si es posible utilizar este método experimental en fluidos con líneas de flujo turbulentas.

INTRODUCCIÓN

Ecuación de Bernoulli: Esta ecuación surge de la aplicación de las leyes de Newton y el teorema de la energía cinética sobre fluidos en movimiento. Se deduce suponiendo un flujo que conserva la energía, estacionario (líneas de flujo suaves con velocidad, densidad y presión constantes en el tiempo) y un líquido incompresible² (Ecuación 1).

$$\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{P_1}{\rho_1} + g \cdot z_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{P_2}{\rho_2} + g \cdot z_2 \quad (1)$$

Fluidos Newtonianos: Se denominan así a aquellos fluidos viscosos en los cuales la fuerza necesaria para mover la superficie superior del mismo es proporcional a la velocidad. Es decir la tensión generada por las paredes del tubo es proporcional al gradiente de la velocidad. Es por ello que la velocidad del líquido en la superficie debe ser cero, de lo contrario el gradiente de velocidad y la tensión de cizalladura serían infinitas. Para que la velocidad sea finita la viscosidad del líquido debe ser cero. Para fluidos reales la viscosidad nunca es cero y se observa que el perfil de velocidades es máximo en el centro del tubo y que la energía mecánica no se conserva.

Teniendo en cuenta esto se puede pensar la ecuación de Bernoulli como una expresión de balance energético donde los términos con u^2 (u es la velocidad en cada punto) corresponden a la energía cinética del sistema y aquellos que dependen de z (la altura en cada punto) corresponden a la energía potencial del sistema. (Ecuación 2)

$$\frac{1}{2} \alpha_1 \cdot u_1^2 + \frac{P_1}{\rho_1} + g \cdot z_1 = \frac{1}{2} \cdot \alpha_2 \cdot u_2^2 + \frac{P_2}{\rho_2} + g \cdot z_2 + \Delta w_{perdido} \quad (2)$$

En la ecuación 2 los subíndices 1 y 2 se refieren a dos puntos a diferentes alturas en el fluido (figura 1), P la presión y α_i es el coeficiente de energía cinética. Este coeficiente representa el cociente entre la energía cinética de un flujo real que atraviesa una sección transversal y la energía cinética del mismo flujo pero con un perfil de velocidades uniformes. De esta manera para flujos uniformes $\alpha=1^1$. Y además $\Delta w_{perdida}$ corresponde a la energía perdida durante el paso del líquido desde el punto 1 al 2.

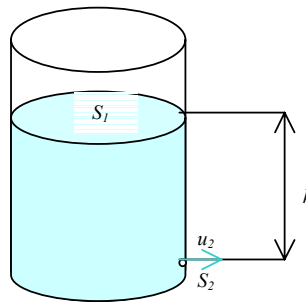


Figura 1: Esquema del recipiente con la indicación de las ubicaciones 1 y 2.

Las fuentes disipadoras de energía son dos. Una de ellas es el contacto del fluido con las paredes del recipiente que lo contiene (pérdidas menores), este contacto genera cambios en los perfiles de velocidad entre los puntos de entrada y salida. La otra es la formación de estelas turbulentas generadas por obstrucciones en el flujo. Datos experimentales indican que estas restricciones generan una disminución de los valores de presión proporcionales al cuadrado de la velocidad ($\Delta P \propto Q^2 \propto u^2$).

Finalmente reescribimos la ecuación de Bernoulli en donde el término $\Delta w_{perdida}$ suponemos que puede ser expresado como la suma de un término dependiente del cuadrado de la velocidad y otro independiente de ella (Ecuación 3). Se pondrá a prueba esta hipótesis durante el desarrollo del experimento.

$$\frac{1}{2g} \cdot u_2^2 + \frac{1}{2g} \cdot k u_2^2 + \Delta z = h + \frac{\alpha_1}{2g} u_1^2 \quad (3)$$

La constante k representa el coeficiente de pérdidas menores en el orificio de salida (figura 1), ΔZ representa la energía perdida independiente de la velocidad ($\alpha_2=1$)¹, la variable h ($=z_1-z_2$) es la diferencia de altura entre la superficie y el orificio de salida.

Ecuación de continuidad: Para fluidos incompresibles donde las densidades en las posiciones 1 y 2 son iguales, la ecuación de continuidad relaciona las velocidades u_1 y u_2 según la ecuación 4 donde tenemos en cuenta que al área para cada una de los puntos del recipiente es circular (Ecuación 4)

$$d_2^2 \cdot C_v \cdot u_2 = d_1^2 \cdot u_1 \quad (4)$$

Donde d_1 y d_2 representan los diámetros del recipiente y del orificio de salida respectivamente, C_v es el coeficiente de vena contracta. C_v es un parámetro relacionado con la sección real del chorro de salida y la sección del orificio del recipiente.

Si combinamos las ecuaciones 3 y 4 y además consideramos que la relación $(d_2/d_1) \cdot C_v$ puede ser despreciable ya que $d_2/d_1 \approx 0.03$ y además $C_v < 1$ entonces u_2^2 mantiene una relación lineal con h según la ecuación 5.

$$u_2^2 \cong \frac{2g}{[1+k]} \cdot (h - \Delta Z) \quad (5)$$

Y a partir de esta relación lineal podemos calcular experimentalmente los coeficientes k y ΔZ despejando estos valores de la pendiente y la ordenada al origen del gráfico. Por otra parte combinando las ecuaciones 4 y 5 obtenemos la ecuación 6.

$$u_1 = -\frac{dh}{dt} = -C_v \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 \cdot \sqrt{2g\mu} \cdot \sqrt{h - \Delta Z} \quad (6)$$

Donde la constante $\mu = 1/(1+k)$, y además el signo de esta ecuación depende del sistema de referencia elegido.

Según la bibliografía leída y las operaciones realizadas en la referencia 1 (Ecuación 7), las variables t_e (tiempo de vaciado), t (tiempo en una determinada altura h), ΔZ , h y h_0 (la altura del fluido a $t=0$) se relacionan de la siguiente manera:

$$\frac{\sqrt{h - \Delta Z}}{\sqrt{h_0 - \Delta Z}} = \left(1 - \frac{t}{t_e}\right) \quad (7)$$

Ahora si combinamos las ecuaciones 6 y 7 entonces podemos calcular el tiempo t_e (ecuación 8):

$$t_e = \frac{\sqrt{h_0 - \Delta Z}}{C_v \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \sqrt{2g\mu}} \quad (8)$$

Finalmente para poder determinar los valores de u_2 asumimos que el movimiento de las partículas del agua que forman el chorro de salida del orificio menor, se comportan de la misma manera que un proyectil durante un movimiento de tiro oblicuo con velocidad inicial u_2 en dirección horizontal. Entonces (ecuaciones de cinemática para un tiro oblicuo 9a y 9b):

$$x(t) = u_2 \cdot t \quad (9a)$$

$$y(t) = H - \frac{1}{2} g t^2 \quad (9b)$$

Donde H corresponde a la altura medida desde el orificio de salida hasta la altura del eje del sistema de referencia según la figura 2 donde se especifica.

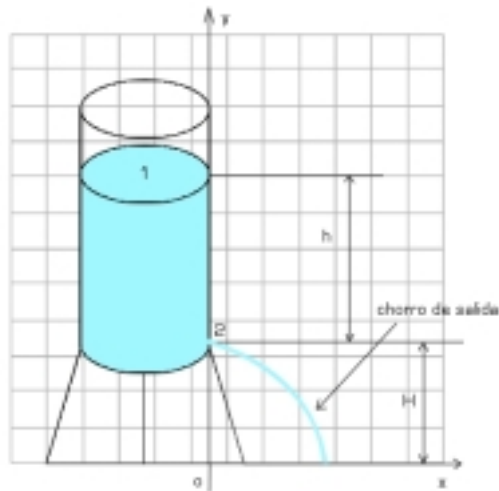


Figura 2: Diagrama del dispositivo experimental donde se hace referencia a h , H y al sistema de referencia utilizado.

Por último combinando las ecuaciones 9a y 9b se obtiene la ecuación 10 de interés para el experimento ya que describe la trayectoria de las partículas de agua al salir del orificio y permite calcular el valor de u_2

$$y(x) = H - \frac{1}{u_2^2} \left(\frac{g}{2} x^2 \right) \quad (10)$$

MÉTODO EXPERIMENTAL

Se utilizó un tanque cilíndrico transparente con un orificio de drenaje lateral cerca del fondo (figura 2), una cámara digital y un cronómetro ($\sigma_{\text{nom}}=0.1\text{s}$). Las dimensiones del recipiente eran: 11 centímetros de diámetro y 25 centímetros de alto (ambas mediciones fueron realizadas con regla $\sigma_{\text{nom}}=0.1\text{cm}$). El diámetro del orificio era de 3 milímetros (medido con un calibre $\sigma_{\text{nom}}=0.01\text{cm}$), y el grosor de la pared del recipiente era de 2 milímetros (medido con calibre $\sigma_{\text{nom}}=0.01\text{cm}$). Se llenó el recipiente con agua y se colocó delante de una grilla con cuadrados de 10 centímetros de lado para contar con una escala real en las fotografías. Para asegurar la nivelación vertical de las líneas de la grilla se utilizó una plomada. Además se aseguro que la posición del recipiente fuese completamente vertical y en consecuencia su área transversal sea circular, gracias a ello es valido pensar en la ecuación de continuidad como se describió en la ecuación 4.

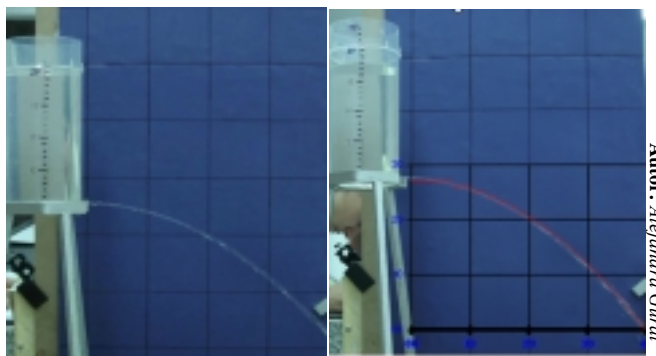


Figura 3: Foto digital del equipamiento utilizado y la salida del chorro.

Se aseguro también que la salida del chorro fuese paralela a la tabla grillada y la cámara digital se encuentre perpendicular delante del recipiente. Así se pudo fotografiar el chorro de agua con la grilla de fondo.

Las fotografías fueron tomadas cada vez que la superficie libre bajaba cerca de 1 centímetro. Al llegar a 5cm del fondo del recipiente las fotografías fueron tomadas

cada 0.5cm. De esta manera, en cada fotografía queda registrada la altura del agua en el cilindro, y la trayectoria de la salida del agua del orificio.

Se construyó una curva en el programa de gráficos (Excel®) a partir de la ecuación 9 donde era posible variar los valores de H y u_2 . El gráfico se movió y se estiró de manera que coincidiera la grilla del gráfico del programa con la presente en el fondo de la foto. Por otro lado a partir de la curva teórica descrita mediante el programa se modificaron los parámetros de la curva buscando que coincidiera el origen (vértice de la parábola) con el orificio de salida y la trayectoria del chorro.

Para medir el tiempo que le demanda a la superficie libre del agua alcanzar cada marca horizontal (cada 1cm o cada 0.5cm dependiendo de la altura h) se utilizó un cronómetro.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la figura 3(b) se muestra como fueron realizados los ajustes de las curvas sobre cada una de las fotos. En ella podemos observar como la ecuación 10 describe con gran precisión la trayectoria de las partículas de agua. Esto indica claramente que las partículas líquidas que forman el chorro siguen la misma trayectoria que hacen las partículas sólidas. De esta manera podemos asegurar que los fluidos siguen las mismas leyes físicas de los sólidos.

En la figura 4 se graficó la ecuación 5 con los datos experimentales y su correspondiente línea de tendencia. En este gráfico vemos como el modelo es consistente con los datos experimentales ya que la relación funcional que mantiene estas dos variables es del tipo lineal. En el mismo gráfico se agregó la recta esperada de no haber tenido en cuenta las pérdidas menores (es decir considerando $k=0$).

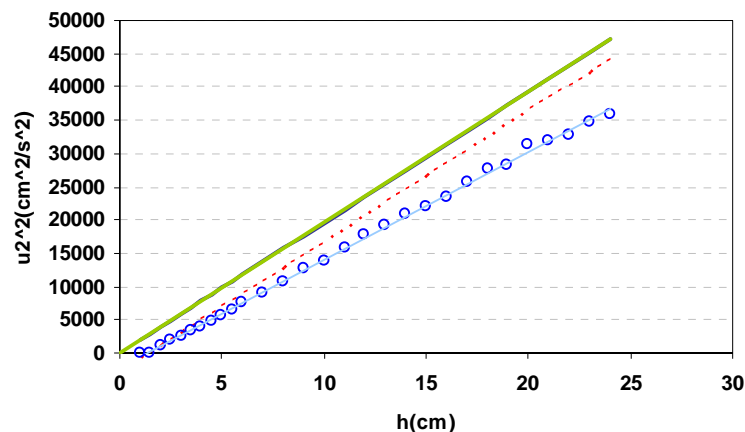


Figura 4: los círculos azules corresponden a los datos experimentales, la línea celeste a su línea de tendencia. La línea punteada roja se obtiene considerando $k=0$, es decir ignorando las pérdidas menores. La línea verde corresponde a la ecuación de Bernoulli (Ecuación 1).

Y además se graficó la ecuación 1. De esta manera vemos que las fuentes de disipación de energía no pueden ser despreciadas ya que ninguna de estas rectas representa los datos reales, obtenidos experimentalmente. La recta en la que se desprecian las pérdidas menores ($k=0$) es significativamente distinta a los datos experimentales, entonces se puede deducir que no solo es importante la componente de pérdida asociada a k sino también lo es la componente ΔZ .

A partir de esta recta experimental se obtuvieron los valores de los parámetros k y ΔZ . Estos datos se encuentran detallados en la tabla 1.

Por otro lado se graficó $\sqrt{h - \Delta Z / h_0 - \Delta Z}$ en función del tiempo (figura 5) en donde también podemos observar como el modelo es consistente con los datos experimentales ya que de haber considerado el $C_v=1$, el tiempo de vaciado del recipiente hubiera sido menor. A partir de la pendiente de la recta experimental se calculo t_e (tiempo de vaciado) y gracias a este valor se despejó el valor de C_v (Tabla 1).

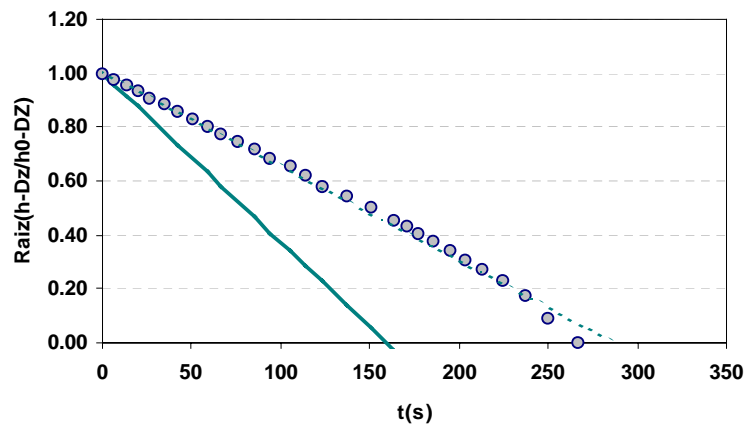


Figura 5: Los círculos grises corresponden a los datos experimentales mientras que la línea punteada verde es su correspondiente línea de tendencia. La línea verde llena es la expectativa teórica para $C_v=1$.

Según la bibliografía leída¹ podemos encontrar una explicación teórica a la contracción del chorro producida en el orificio. Para ello podemos pensar en la cantidad de movimiento en el orificio de salida definida como $dP/dt = \rho Q u_2^1$. Donde Q es el caudal de flujo definido como $Q = C_v A u_2$ y A representa el área en este caso del orificio de salida. Como sabemos la fuerza responsable de la variación en la cantidad de movimiento se asocia a la presión hidrostática, $P = \rho g h$ entonces podemos decir que (ecuación 11):

$$PA = \rho ghA \approx C_v A \rho u_2^2 \quad (11)$$

Y si ahora combinamos las ecuaciones 5 y 11 decimos que (ecuación 12):

$$C_v \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1+k}{1-\Delta Z/h} \right) \approx 0.64 < 1 \quad (12)$$

Parámetros	1º experimento	2º experimento	3º experimento
Δz	0.9±0.1	1.3±0.1	0.8±0.1
μ	0.79±0.01	0.82±0.01	0.87±0.01
k	0.26±0.01	0.21±0.01	0.16±0.01
C_v	0.55±0.01	0.56±0.01	0.51±0.01

Tabla 1: Corresponde a los valores de los parámetros obtenidos experimentalmente con sus correspondientes errores.

El número de Reynolds representa el cociente entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas en el flujo. Sabiendo que este número es un parámetro que nos indica las características de las líneas de flujo para un fluido en particular¹, se calculó este número para cada una de las diferentes alturas del líquido en el cilindro y de esta manera determinar si la circulación del agua en el chorro era del tipo laminar, turbulenta o una condición intermedia entre estas dos. De esta manera si $Re < 2000$ entonces estamos frente a un flujo laminar, por otro lado si $Re > 4000$ entonces se trata de un flujo turbulento, mientras que si Re se encuentra entre estos dos valores el fluido se comporta como una combinación de las dos condiciones anteriores (fluido transicional). En la figura 6 se observan los números de Reynolds en función de la altura (h) del fluido. Podemos ver como estos datos experimentales varían entre 400 y 5000, es decir que abarcan todos los tipos de flujo desde laminar a turbulento.

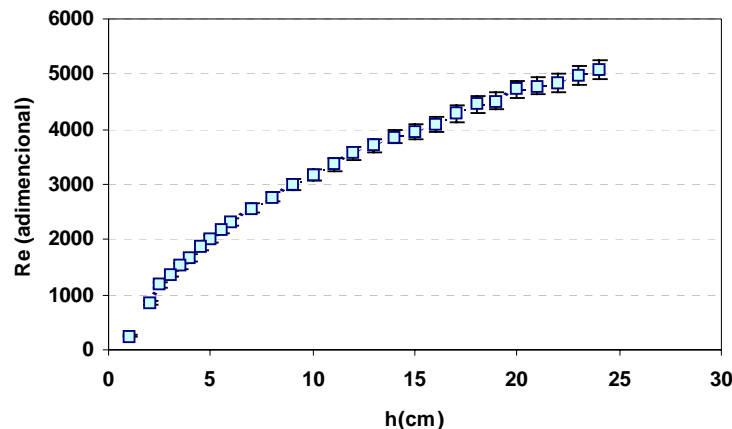


Figura 6: Los cuadrados celestes indican los números de Reynolds en el orificio de salida para las distintas alturas del líquido.

Como sabemos que para este modelo experimental los valores de k , ΔZ y C_v son los mismos para todos los números de Reynolds podemos decir que la ecuación extendida de Bernoulli, y las pérdidas consideradas en este modelo son válidas para cualquier tipo de flujo.

CONCLUSIONES

Los resultados indican que las consideraciones previas tenidas en cuenta a la hora de pensar el experimento son consistentes con los datos experimentales. Además se evidencia la importancia de la ecuación de Bernoulli, y su posible aplicación en fluidos reales donde las pérdidas de energía si existen.

Por otro lado como se observa en la figura 3 las mismas ecuaciones que describen la trayectoria de las partículas sólidas también son aplicables a fluidos, de esta manera se descarta la posibilidad de que existan leyes distintas para la materia sólida y líquida.

Las dos fuentes de disipación de la energía son imprescindibles para explicar los datos experimentales, no por que el contacto del líquido con las paredes del tubo genere pérdidas menores podemos despreciarla. Al mismo tiempo tampoco podemos obviar la existencia de una pequeña contracción del chorro en el orificio de salida, es por ello que considerando $C_v=1$ no se explican los datos experimentales.

Durante este experimento se pudo ampliar la gama de números de Reynolds para los que es aplicable esta técnica.

REFERENCIAS

¹M. E. Saleta, D. Tobia y S. Gil, “Experimental study of Bernoulli’s equation with losses,” Am. J. Phys. **73**, 598-602 (2005).

²E. Gettys, F. Keller, M. Skove, *Física clásica y moderna* (Mc Graw Hill, New York, 1991)