

Estudio del movimiento de una cadena que cae deslizándose por un caño.

Santiago Carmona
carmonasantiago@hotmail.com

Física I – 2004 - Universidad Nacional de General San Martín – Escuela De Ciencia Y Tecnología

RESUMEN

La caída de la cadena que se desliza por una mesa, ha sido analizada en diversos textos, de diferentes maneras, planteándose como un problema en dos dimensiones, como un sistema ideal sin fricción. En este ensayo, se simplificó el problema, restringiendo el movimiento de la cadena a un grado de libertad; en nuestro experimento que la cadena se desplaza por el interior de un caño que acaba en un codo en L, de modo de forzar que el problema sólo tenga un grado de libertad. Se registraron los datos del experimento electrónicamente, y se los confrontó con la expresión teórica propuesta. Finalmente se desarrolló un modelo teórico que explica muy bien el comportamiento observado experimentalmente.

INTRODUCCIÓN

El estudio del movimiento de una cadena cayendo del borde de una mesa, puede resultar en una tarea muy complicada^{1,2}, que requiera un análisis complejo. El objetivo principal de este ensayo es simplificar dicho problema, limitando los grados de libertad de movimiento de la cadena. De esta manera, se analizará teóricamente el comportamiento de un sistema unidimensional, de masa y longitud constantes, que se desliza unidireccionalmente por un caño con fricción. En primera aproximación despreciarán las masas del hilo y de la polea que se usa para registrar el movimiento de la cadena, ver figura 1.

Modelo Teórico:

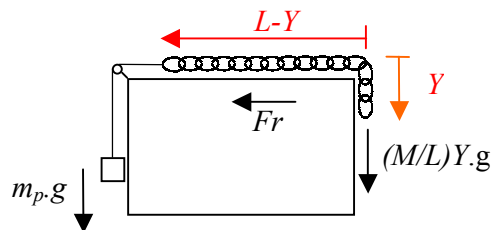


Figura 1. Esquema de arreglo experimental usado.

El esquema del modelo experimental propuesto se muestra en la Figura 1. Usando el balance energético del sistema, es decir:

$$P_{roce} = F_{roce} \cdot v = \frac{dE_T}{dt} = \frac{d}{dt}(E_{cinetica} + V), \quad (1)$$

tenemos:

Según la segunda ley de Newton:

$$(M + m_p)Y'' = \frac{Y}{L}Mg - \mu_d \frac{(L - Y)}{L}Mg_r - m_p \cdot g \quad (2)$$

donde:

M es la masa de la cadena

M_p es la masa del contrapeso

g es la aceleración de la gravedad

L es la longitud de la cadena

$\mu = \mu_d$ es el coeficiente de rozamiento dinámico

Y es la cantidad de cadena caída

Y'' es la aceleración del sistema

Lo que conduce a la expresión:

$$Y'' = (1 + \mu) \cdot g \cdot Y / L(1 + M_p/M) - (\mu + M_p/M) \cdot g / (1 + M_p/M) \quad (3)$$

llamamos:

$$\lambda^2 \equiv \frac{g}{L \cdot (1 + M_p/M)} \cdot (\mu_d + 1) \quad (4)$$

y

$$B \equiv \frac{g}{(1 + M_p/M)} \cdot \left(\mu_d + \frac{M_p}{M} \right) \quad (5)$$

entonces la ecuación (3) se puede escribir de la siguiente manera:

$$Y'' = \lambda^2 \cdot Y - B \quad (6)$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$Y(t) = A \cdot \cosh(\lambda \cdot t) + C \quad (7)$$

Con las condiciones de borde

$$Y(t=0) = Y_0 \text{ y } Y'(0) = 0$$

se obtiene

$$A = Y_0 - Y_d \\ C = Y_d$$

por lo tanto, reemplazando (7) en (4), (5) y (6), tenemos:

$$Y_d = [(\mu + M_p/M) \cdot L] / (1 + \mu)$$

de manera que la expresión (7) queda de la siguiente manera:

$$Y(t) = (Y_0 - Y_d) \cdot \cosh(\lambda \cdot t) + Y_d \quad (8)$$

que nos conduce al **primer modelo** o *modelo "ingenuo"*.

Modelo Incluyendo pérdida de energía en los choque de la cadena.

Un análisis más detallado nos lleva a realizar una modificación en la expresión (1) con la correspondiente adición de un término adicional de rozamiento:

$$F_{ra} = \beta \cdot M_t \quad (9)$$

donde

M_t es la masa total ($M + M_p$)

β es un coeficiente roce adicional, asociado a las pérdidas de energía en los choque de la cadena con el codo del tubo auxiliar

de esta manera, la ecuación (3) puede ser escrita como:

$$Y'' = \lambda^2 \cdot Y - B \quad (10)$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= (1 + \mu) \cdot g / [L(1 + M_p/M)] \\ B &= [(\mu + M_p/M) \cdot g + \beta] / (1 + M_p/M) \end{aligned} \quad (11)$$

entonces, la nueva EC.5 permanece siendo:

$$Y(t) = (Y_0 - Y_d) \cdot \cosh(\lambda \cdot t) + Y_d \quad (12)$$

pero ahora,

$$Y_d = [\mu + (M_p/M) + (\beta / g) \cdot (1 + M_p/M)] \cdot L / (1 + \mu) \quad (13)$$

lo que conforma el segundo modelo, o *modelo mejorado*.

ARREGLO EXPERIMENTAL

Como se observa en la figura 2, se colocó una tabla a una altura adecuada, que sostenga el tubo de plástico por el que se deslizará la cadena, previamente nivelada horizontalmente. El mismo tiene unido un codo en su extremo, para forzar la curvatura requerida. Como se puede ver, la cadena tiene asociada a uno de sus extremos un hilo que, luego de pasar por la polea del fotointerruptor, sujeta al contrapeso. La función de este contrapeso es la de evitar que el hilo deslice sobre la polea del sensor, y de esta manera registrar datos erróneos; ya que pretendemos que la velocidad tangencial de la polea sea idénticamente la misma que la velocidad de la cadena.

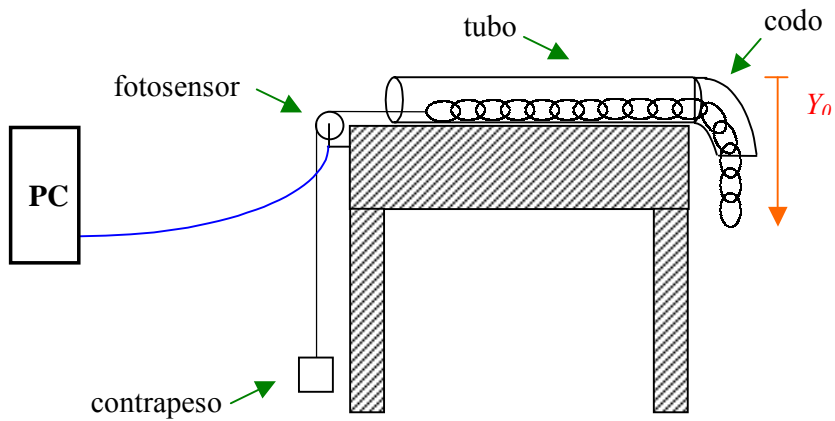


Figura 2. Esquema del arreglo experimental construido

Se realizaron sucesivos tiros de la cadena, variando la longitud inicial (Y_0). Como se puede observar en la figura (3), la longitud inicial se midió a simple vista sobre una regla.

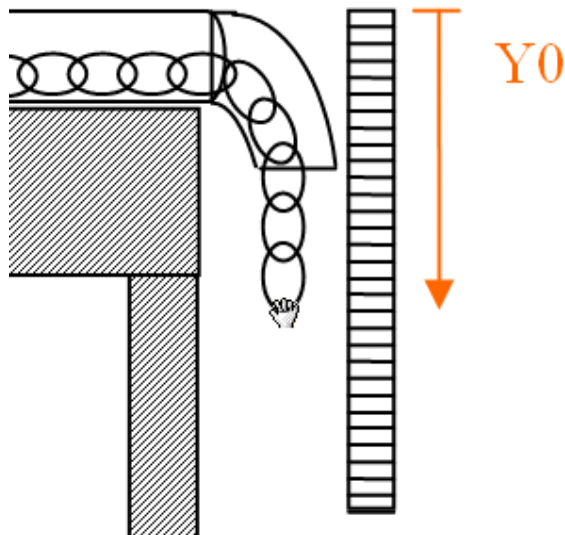


Figura 3. Variación de la longitud inicial (Y_0)

Por último se repitió varias veces la experiencia, pero esta vez sin el codo.

RESULTADOS:

Se armaron planillas en Microsoft Excel, que contienen los datos registrados de diversos experimentos (soltando la cadena para diferentes valores de Y_0), y se graficaron las curvas correspondientes a $Y(t)$ y $V(t)$ (distancia y velocidad en función del tiempo, respectivamente), obtenidas experimentalmente y teóricamente.

Se recuerda que la ecuación teórica propuesta para $Y(t)$ es:

$$Y(t) = (Y_0 - Y_d) \cdot \cosh(\lambda \cdot t) + Y_d \quad (14)$$

se deriva respecto al tiempo:

$$V(t) = (Y_0 - Y_d) \cdot \lambda \cdot \sinh(\lambda \cdot t) \quad (15)$$

y se obtiene la expresión teórica para la velocidad.

También se graficó Y en función del $\cosh(\lambda \cdot t)$ y V en función del $\sinh(\lambda \cdot t)$, con el fin de linealizar las curvas.

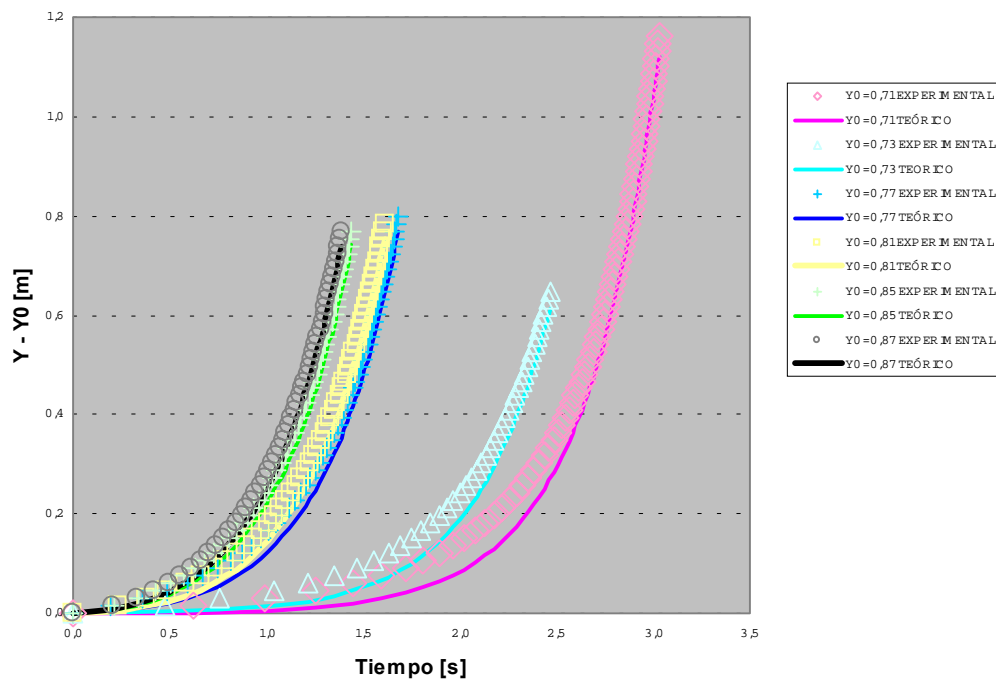


Figura 4. Resultados experimentales y ajuste, para $Y - Y_0$ vs. tiempo, para los diferentes Y_0

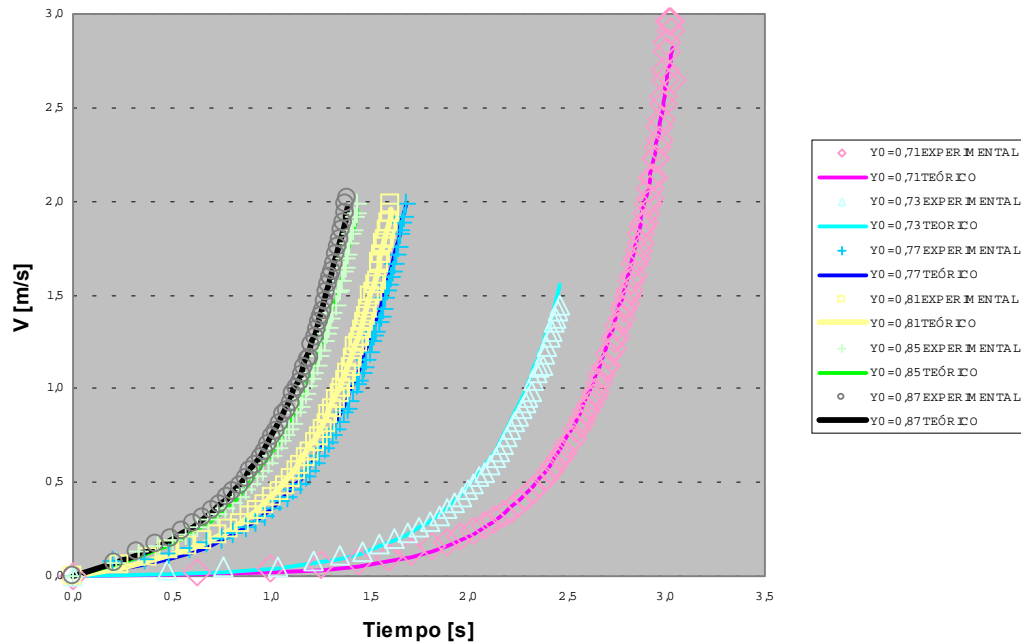


Figura 5. Resultados experimentales y ajuste, para V vs. tiempo, para los diferentes Y_0

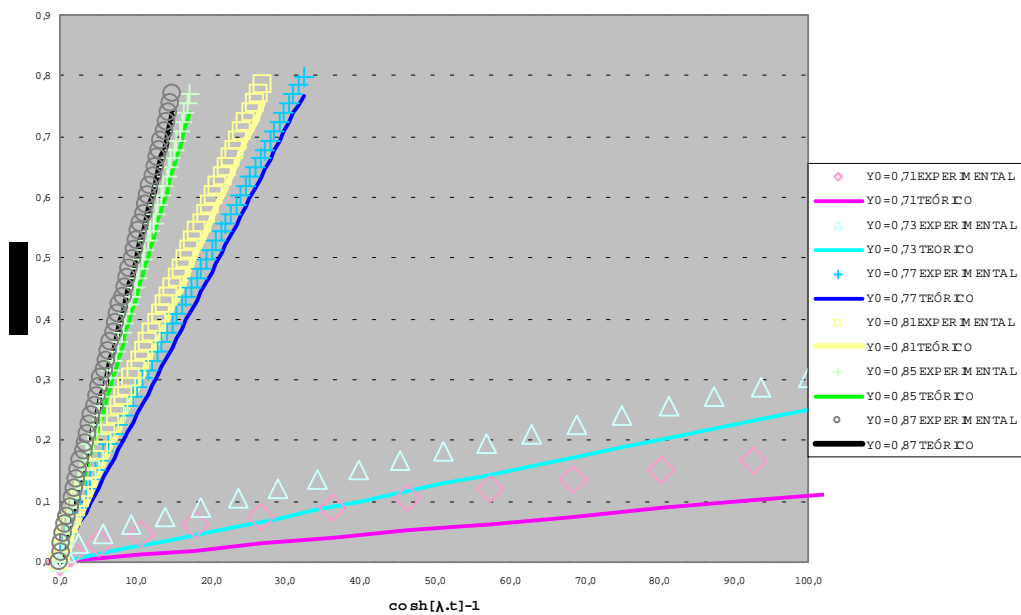


Figura 6. Linealización de las curvas de la fig. 4, representa $Y - Y_0$ en función de $\cosh(\lambda.t)-1$, para los diferentes Y_0

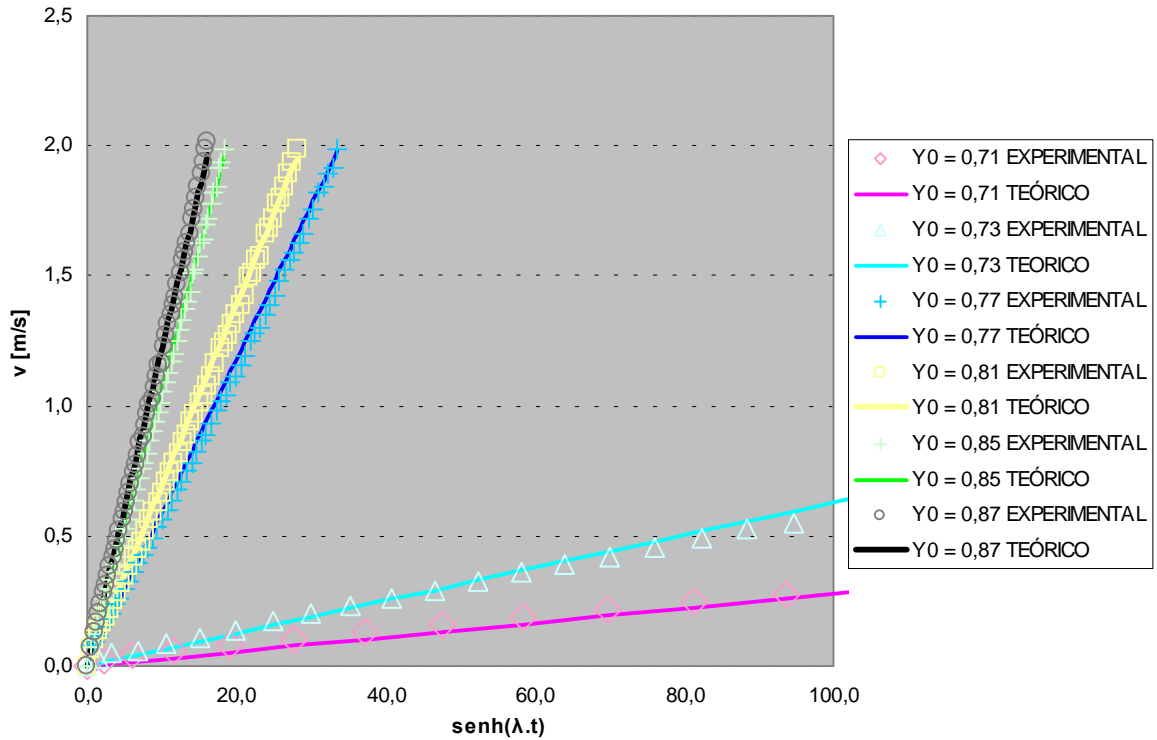


Figura 7. Linealización de las curvas de la fig. 5, representa V en función de $\sinh(\lambda.t)$, para los diferentes Y_0

De la pendiente de la curva linealizada de $Y - Y_0$ experimental (Figura 6) se puede extraer el valor de $(Y - Y_0)$:

$$Y - Y_0 = (Y_0 - Y_d) [\cosh(\lambda.t) - 1] \quad (16)$$

De $(Y_0 - Y_d)$ se puede despejar el valor de β Término correspondiente al roce adicional, agregado en el *modelo mejorado*.

$$\beta/g = [(Y_0 - M) \cdot (1 + \mu) / [(\mu + (Mp/M)) \cdot L] - 1] \cdot (\mu + (Mp/M)) / (1 + (Mp/M)) \quad (17)$$

También se graficaron los datos obtenidos de los tiros de cadena por el tubo en ausencia del codo.

Discusión:

De la pendiente de la línea de tendencia de la figura 6 (serie de datos experimentales), podemos obtener el valor de β . Como se puede apreciar en la figura 6, efectivamente el movimiento de la cadena puede ser descrito por el modelo mejorado Ec.(13), ya que los datos muestran en todos los casos una buena concordancia con el modelo. La introducción del coeficiente β resulto de mucha importancia para lograr un buen ajuste de la curva teórica.

Este factor es de gran importancia, ya que permite corregir los errores introducidos debido a la imprecisión en la determinación de datos como el coeficiente de rozamiento dinámico (μ) y sobre todo, la distancia inicial Y_0 , que es muy significativa. La medición de esta cantidad a simple vista sobre una regla, no proporciona la precisión requerida.

Además de estas correcciones, la constante β , contemplaría los rozamientos adicionales producidos por el hilo, la polea del sensor, la superficie del codo, y los sucesivos choques inelásticos que se producen entre eslabones disipando energía.

Observando los gráficos obtenidos para los experimentos con y sin codo, se comprueba que, en presencia del codo, la cadena describe un movimiento, mucho más “prolijo”, en el sentido de la suavidad de la curva obtenida. En oposición, en ausencia del codo, la cadena avanza “de a saltos”, ya que su movimiento se ve afectado por el borde del tubo. Esto se debe a la oposición que produce este borde “filoso” al paso de los eslabones.

CONCLUSIÓN:

Se puede concluir que se ha desarrollado un modelo teórico, de manera simple, que explica adecuadamente el movimiento que describe una cadena que cae libremente deslizándose por un tubo. De los datos experimentales, es posible obtener los parámetros relevantes del modelo μ y β . Los valores de $Y(t)$ y $V(t)$ pueden ser descritos adecuadamente por el modelo propuesto.

REFERENCIAS:

1. -Domingo Prato y Reinaldo J. Gleiser, “Another look at the uniform rope sliding over the edge of a smooth table”, Am. J. Phy. 50(6), 1982
2. -David Keiffer, “The falling chain and energy loss”, Am. J. Phys. 69 (3), 2001