

Estudio de la Física de una Catapulta

Universidad de Favaloro, Facultad de Ingeniería

Cano, Ramiro.....cramirocano@hotmail.com

Cearras, Mariana..... benito_bb@hotmail.com

Díaz, Federico.....facil27@hotmail.com

Resumen

En el presente trabajo aplicamos el principio de conservación de energía y conceptos de dinámica con el objetivo de lograr una mejor comprensión del funcionamiento empírico y teórico de una catapulta, para lo cual se construyó un modelo de dimensiones reducidas con el cual realizamos una serie de tiros. Contrastamos las bases teóricas con los resultados experimentales, implementando para esto, un sistema de vídeo y un software para análisis del mismo.

Introducción

Debido a los avances de la ciencia y la tecnología es probable que nos encontremos con fenómenos físicos que ocurran en ámbitos especiales, como puede ser aquellos que toman lugar a mucha distancia de nuestro alcance (espacio exterior) o en lugares de dimensiones reducidas (interior del cuerpo humano) . Dado que estamos limitados por nuestros sentidos, en especial la vista, recurrimos a distintas herramientas, tales como microscopios, telescopios, etc., para presenciar dichos fenómenos físicos, y aún así el estudio de los mismos es complicado. Por esta razón, es que utilizamos cámaras de vídeo, que nos permiten analizar estos hechos, sin tener que presenciarlos.

La idea de nuestro experimento es estudiar que fenómenos se dan lugar en un tiro parabólico efectuado con catapulta, utilizando la cámara de vídeo para capturar las imágenes y luego procesarlas, con la ayuda de un software especial, en la computadora.

La catapulta fue la primera máquina militar en la cual se utilizó la fuerza de gravedad y la caída de pesos, para impartir la energía necesaria a un proyectil. Nosotros utilizamos el principio de la conservación de la energía en el modelo idealizado para obtener datos aproximados del proyectil. Los cálculos implican el uso de dinámica básica y lo interesante consta en comparar los datos obtenidos analíticamente con los experimentales.

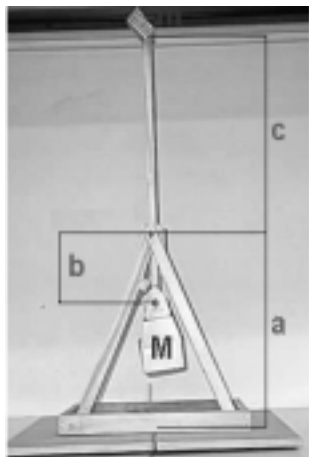
Esquema del informe

- Consideraciones preliminares: análisis de la conservación de la energía
- Descripción del experimento
- Análisis del video
- Tratamiento estadístico de las distancias alcanzadas
- Resultados
- Conclusión

Consideraciones preliminares: Análisis de la conservación de la energía:

Con el fin de realizar los lanzamientos construimos una catapulta (**Fig. 1**), que analizaremos en forma idealizada. Sus dimensiones son:

- Altura de la base al eje (**a**): 23.50 B 0.05 cm.
- Longitud del brazo mas chico (**b**): 8.50 B 0.05 cm.
- Longitud del brazo mas largo (**c**): 28.20 B 0.05 cm.
- Maza del brazo completo (**m**): 2.65 B 0.05 g.
- Maza del contrapeso (**M**): 21.42 B 0.05 g.
- Maza del proyectil (**m**): 0.41 B 0.05 g



Figuras 1A y 1B: Dos vistas de la catapulta construida a escala y las referencias de sus dimensiones (1A)

En la **Fig. 2** vemos la catapulta previa al disparo, **M** es la masa del contrapeso, que está contenido en una canasta movible en el extremo del brazo de más corta longitud. En el final del brazo más largo, se encuentra el proyectil, de masa **m**, y se tuerce el brazo de manera que este sea despedido con ángulo de 45° para maximizar el alcance. Se deja el contrapeso libre de caer, y el brazo más largo arroja el proyectil con ese ángulo. La posición de la catapulta al momento del lanzamiento se ve en la **Fig. 3**, donde se puede ver claramente que el proyectil sale despedido cuando el brazo queda a 90° del suelo, esta es la forma de conseguir una trayectoria óptima. En la práctica conseguimos evitar la oscilación del brazo con un tope cuando este se encuentra perpendicular al suelo.

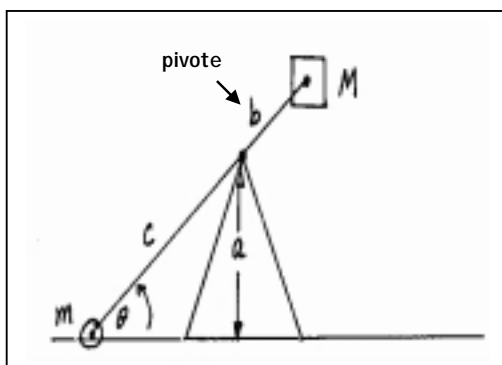


Figura 2: Diagrama esquemático de la posición inicial de la catapulta. **m** es la masa del proyectil y **M** la del contrapeso

Figura 3: Diagrama esquemático de la posición de lanzamiento de la catapulta. \mathbf{V} y \mathbf{v} son las velocidades de \mathbf{M} y \mathbf{m} respectivamente al momento del lanzamiento. El proyectil sale despedido con un ángulo de 45° .

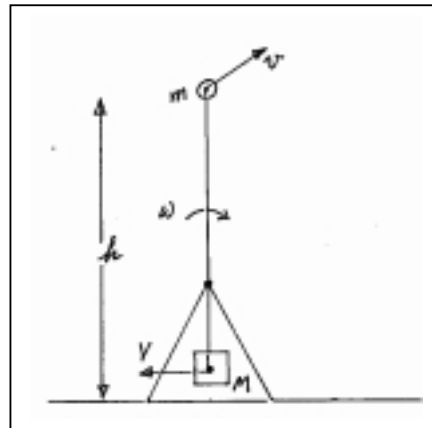
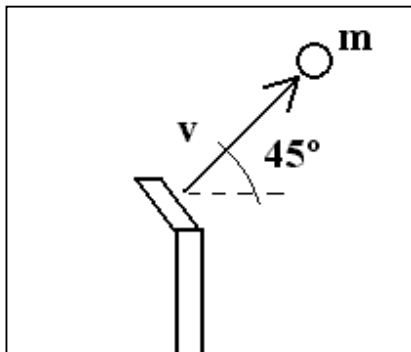


Figura 4: Ampliación de la porción superior del brazo al momento del lanzamiento. El proyectil sale despedido con un ángulo de 45°

Como el proceso empieza con el proyectil de masa \mathbf{m} que se desea arrojar en el suelo en reposo, la energía total del sistema (energía mecánica \mathbf{E}) es la energía potencial gravitatoria \mathbf{U}_1 del contrapeso de masa \mathbf{M} (con $\mathbf{M} > \mathbf{m}$), donde \mathbf{g} es la aceleración gravitatoria;

$$E = U_1 = M g (b + c) \quad \text{Sen} \quad = M g (b + c) (a / c) \quad (1)$$

Además, asumimos que el centro de masa del brazo está aproximadamente en el pivote (punto donde el brazo está unido a la base y es el eje de rotación), entonces su energía potencial no necesita ser tenida en cuenta. Al momento del lanzamiento, las dos masas tienen energía potencial, y el brazo y las dos masas tienen también energía cinética \mathbf{K} . La energía total al momento del lanzamiento es;

$$E = U_2 + K_2$$

$$E = M \cdot g \cdot (a - b) + m \cdot g \cdot (a + c) + \frac{M \cdot V^2}{2} + \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{I \cdot \omega^2}{2} \quad (2)$$

Donde **I** es el momento de inercia del brazo con respecto a su centro de masa. Si **m** es la masa del brazo;

$$I = \frac{\mu \cdot b \cdot c}{3}$$

Y **w** su velocidad angular, que es la misma para ambas masas, y es la velocidad lineal dividida en el radio, entonces;

$$\omega = \frac{v}{c} = \frac{V}{b} \text{ de donde obtenemos que } V = \omega \cdot b = \frac{v \cdot b}{c}$$

Ahora podemos eliminar tanto **w** como **V** de la ecuación (2) y obtenemos una ecuación cuyas incógnitas son sólo **E** y **v**;

$$E = M \cdot g \cdot (a - b) + m \cdot g \cdot (a + c) + \frac{v^2 \cdot \left(\frac{M \cdot b^2}{c^2} + m + \frac{\mu \cdot b}{3 \cdot c} \right)}{2}$$

Asumimos la conservación de la energía entre la posición inicial y la de lanzamiento, por lo tanto podemos igualar las expresiones para **E** de la ecuación (1) y (3) y despejar **v**², obtenemos;

$$v^2 = \frac{2 \cdot g \cdot (a + c) \cdot \left(\frac{M \cdot b}{c} - m \right)}{\left(\frac{M \cdot b^2}{c^2} + m + \frac{\mu \cdot b}{3 \cdot c} \right)} \quad (4)$$

Reemplazamos en la ecuación obtenida, con las magnitudes que corresponden a la catapulta que construimos;

a = 0.235 B 0.0005 m ; **b** = 0.085 B 0.0005 m ; **c** = 0.282 B 0.0005 m ; **M** = 21.42 B 0.05 g ;
m = 0.41 B 0.05 g

Podemos obtener analíticamente, la velocidad con la que sale despedido el proyectil, que es $v = 4.83 \pm 0.07$ m/s (y sabemos que el ángulo del disparo es 45°), y estimar cuales deberían ser los datos obtenidos experimentalmente en las mismas condiciones. Incluso, dado que conocemos el ángulo de lanzamiento, sabemos que la velocidad inicial en x y en y es igual, y corresponde a aproximadamente 3.41 m/s

A fin de poder comparar, calculamos la formula que expresa la posición en función del tiempo, dada por:

$$X(t) = 3.41 \text{ m/s} * t \quad (0 < t < 0.5 \text{ seg.}),$$

De donde obtuvimos que la distancia a la que impacta el proyectil es **1.7 m**.

Descripción del experimento:

A fin de poner en práctica la experiencia construimos una catapulta en escala, similar a las utilizadas en la era medieval. La misma lanza proyectiles que ofrecen poca resistencia al aire de masa 4 ± 0.5 g, con un ángulo de 45° sobre la horizontal.

La resistencia del aire, genera una fuerza horizontal contraria al movimiento que en este caso no se tiene en cuenta para el cálculo, sin embargo la calculamos para comprobar que es muy pequeña.

$$F = D v^2, \quad (5)$$

con $D = C \rho A / 2$

Donde A es la sección del proyectil con la que “corta” el aire, que es aprox. 0.01 m^2 , y C es el coeficiente de arrastre que para este tipo de proyectiles y tiros es 0.02, y ρ la densidad del aire, que a 1 atm y 20°C es de 1.2 kg/m^3 , a partir de estos valores estimamos que la fuerza es de $5.8 \cdot 10^{-4} \text{ N}$, que es despreciable.

Utilizamos dos métodos para determinar el alcance del proyectil, por un lado mediante el video (detallado a continuación) y por otro lado realizamos una serie de lanzamientos que impactaban sobre papel carbónico, a partir de donde determinamos la desviación (ΔX) del punto de impacto del proyectil además del valor medio del alcance experimentalmente; el valor obtenido fue **1.69 \pm 0.02 m**.

Luego, filmamos varios lanzamientos, para posteriormente digitalizarlos y analizarlos mediante un software específico¹, utilizado para el análisis de trayectorias. Con dicho programa pudimos determinar magnitudes como velocidad inicial (V_i), velocidad final (V_f), posición en función del tiempo ($X(t)$) y altura en función del tiempo. El fin del software es obtener la forma geométrica, en este caso una parábola, para luego determinar la ecuación que modela la trayectoria.

Análisis del vídeo:

En esta parte del experimento nos ocupamos de definir los puntos que determinan la trayectoria del proyectil en cada cuadro del vídeo.

El proceso comienza con establecer una escala de referencia en el cuadro inicial y ubicar el punto de coordenadas como origen, como se muestra en la **Fig. 5**. Estas últimas son fundamentales para que el programa ordene el conjunto de datos correctamente.

Una vez definidos la escala y la posición del origen, el paso siguiente es localizar la posición del proyectil y asignarle un punto, como se observa en la **Fig. 6**. Este punto define parámetros como, posición respecto de los ejes de abscisas (x e y) vinculados a la diferencia de tiempo entre cuadros. La colección de puntos es dispuesta por el programa en un sistema de ejes cartesianos, donde se expresa la posición en función del tiempo (**Fig. 7A**). En nuestro caso, la serie de puntos representaban, de acuerdo con nuestras expectativas, una parábola invertida. El paso siguiente, es lograr una línea de tendencia que, de acuerdo a nuestros conocimientos, debe ser de orden cuadrático, como se muestra en la **Fig. 7B**. Con la línea de tendencia obtuvimos los coeficientes para ajustar la ecuación (3) que modela la trayectoria. En la **Fig. 8** se muestra el gráfico de la altura en función del tiempo.

$$Y(t) = -1/2 \cdot g \cdot t^2 + A \cdot t + B$$

Ecuación 5: Ecuación que describe la trayectoria de tiro parabólico, donde g representa la aceleración de la gravedad, A es la velocidad inicial y B el espacio inicial.

Una vez obtenida esta expresión, el experimento puede ser tratado como un problema de dinámica, en el cual es posible obtener la ecuación de la velocidad en función del tiempo con solo derivar la **ecuación 5**.

¹ **Videopoint** version 2.1.2, de Lenox Softworks, USA, 1997, www.lsw.com/videopoint

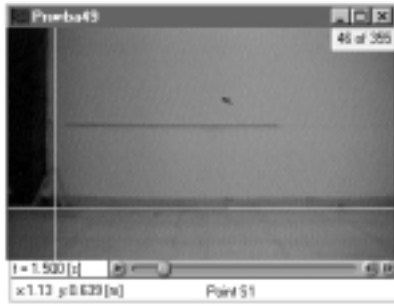
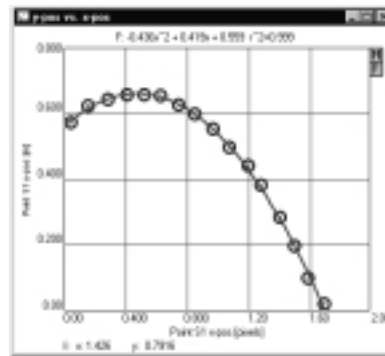
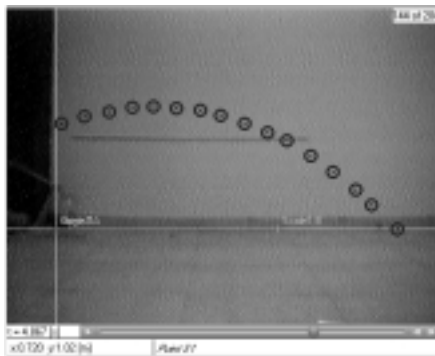


Figura 5: En esta imagen se muestra la ubicación del origen utilizado como referencia (líneas en amarillo) y la línea utilizada para establecer la escala (en gris).



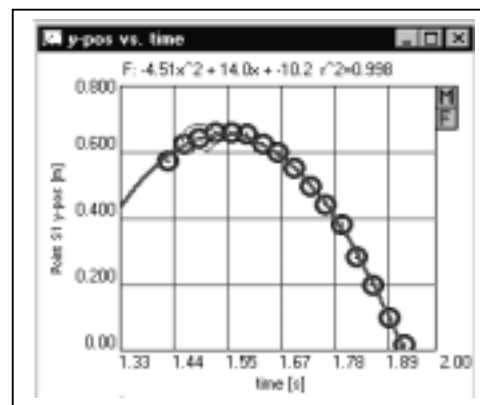
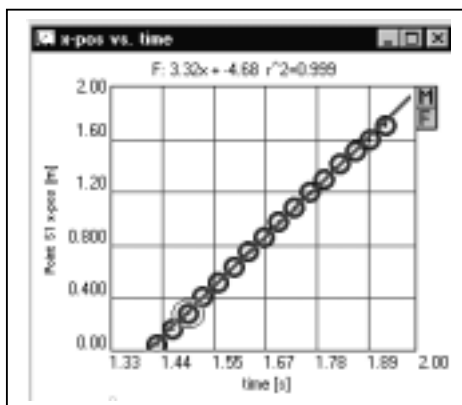
Figura 6: En esta imagen se muestra el punto asignado a la posición del proyectil, en el cuadro 195 de un total de 204, y el tiempo establecido para este cuadro es $t = 5.233$ seg. Esta información es utilizada, por ejemplo para el cálculo de velocidad instantánea.



A.

B.

Figura 7: A. En la imagen se observa el conjunto de puntos que conforman la trayectoria. B. La línea de tendencia propuesta por el programa permite lograr un modelo de la trayectoria.



Figuras 8 y 9: Gráficos de $X(t)$ y $Y(t)$, con sus respectivas líneas de tendencias. El gráfico de $X(t)$ es una función lineal, por que la velocidad es constante y el de $Y(t)$ una función parabólica. Se pueden ver las funciones que aproximan a cada distribución y sus coeficientes de correlación .

Lo primero que debemos tener en cuenta antes de analizar cualquier resultado proveniente del VideoPoint, es que el tiempo del tiro es desde 1.433 a 1.933 segundos, un tiro de exactos 0.5 segundos de duración, por lo tanto, cuando veamos las ecuaciones, estas no tendrán las relaciones que acostumbramos ver, por ejemplo, que el término independiente en $Y(t)$ es la posición inicial.

A partir de la ecuación $X(t) = 3.32 \text{ m/s } t - 4.68 \text{ m}$, vemos, por ejemplo, que en el inicio del tiro ($t = 1.433 \text{ s}$), x es aproximadamente 0 m (considerando que se tomó como origen la catapulta), y al momento del impacto ($t = 1.933 \text{ s}$), x es alrededor de 1.7. $V_x(t) = 3.32 \text{ m/s}$ (es $dX(t)/dt$) y la aceleración $A_x(t) = 0$, coincidiendo con los resultados esperados (tanto por el cálculo analítico como por el método del carbónico). Adicionalmente calculamos la ecuación de la posición para el tiempo variando entre 0 y 0.5 segundos. $X(t) = 3.31 \text{ m/s } t + 0.07 \text{ m}$ con $t \in [0, 0.5]$, y ahora podemos decir que 3.31 m/s es la velocidad inicial, y que 0.07 m ($\widehat{0}$) es la posición inicial en el eje x .

Analizamos también $Y(t) = -4.51 \text{ m/s}^2 t^2 + 14 \text{ m/s } t - 10.2 \text{ m}$, y vemos que la altura inicial ($t = 1.433 \text{ seg}$) es 0.6 m, aproximadamente lo que mide la altura de la catapulta (considerando que se tomó como origen el piso), y la altura final ($t = 1.933 \text{ seg}$) es 0.01 m ($\widehat{0}$) dado que el lugar del impacto fue al nivel del suelo. Calculamos la ecuación de la altura para $t \in [0, 0.5]$, $Y(t) = -4.52 \text{ m/s}^2 t^2 + 1.08 \text{ m/s } t + 0.59 \text{ m}$, de donde podemos deducir que 0.59 m es la altura inicial, 1.08 m/s la velocidad inicial, valor que si bien no es tan acertado como los demás, no afecta en gran medida a la velocidad resultante, por ejemplo a la hora de compararla con los resultados analíticos, además teniendo en cuenta la cantidad de fuentes de error, consideraremos éste un resultado que no contradice nuestras conclusiones (más adelante expresadas). Y finalmente 4.52 es muy similar a $\frac{1}{2}g$. La velocidad resultante es 3.5 m/s similar a la especulada con los cálculos analíticos, dada las abundantes fuentes de error.

Tratamiento estadístico de las distancias alcanzadas

Para obtener datos adicionales, con los cuales compara los resultados anteriores, llevamos a cabo una serie de lanzamientos y posteriormente realizamos el tratamiento estadístico correspondiente a las distancias alcanzadas. Las cifras obtenidas nos permitió confeccionar un histograma (**Fig. 11**) en el cual se observa que el valor medio es **1.69 ± 0.02 m** y que el mismo es similar a los datos obtenidos de la computadora y del análisis de la conservación de la energía.

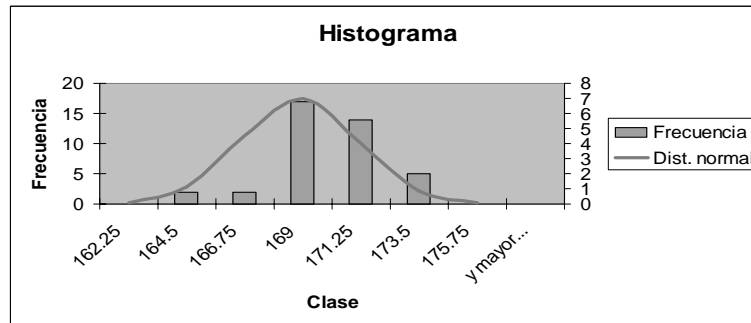


Figura 11: En esta figura se muestra el histograma (Campana de Gauss) resultante en donde el valor medio esta situado a 1.69 B 0.02 m del punto de lanzamiento.

Resultados

Los resultados de todos los análisis coincidieron con nuestras expectativas en magnitud y forma, y además coincidieron entre ellos. Lo obtenido en el carbónico, de la longitud fue equivalente al alcance máximo de la ecuación que dedujimos con el Videopoint, y a su vez coincidió con lo obtenido analíticamente con las proyecciones a partir de la velocidad inicial calculada con la conservación de la energía, además, este resultado fue el mismo obtenido por medio del software de la velocidad inicial. Por lo tanto, podemos decir que a pesar de diferencias despreciables, los resultados de los tres tipos de pruebas que realizamos fueron coincidentes.

Conclusión

Nuestro experimento nos demostró que para el análisis de trayectorias, es igualmente efectivo cualquier análisis mientras se realice en las condiciones correctas y con mucho cuidado de tener en cuenta todos los detalles, como marcas y escalas de referencia en el montaje del experimento, luz adecuada y errores causados por la perspectiva.

Además, lo que dedujimos es que el tiro realizado en la práctica tiene las mismas características que un tiro del mismo tipo pero analizado en condiciones ideales (los factores externos, como la resistencia del aire, son despreciables)

Podemos concluir, entonces, que con el uso de una cámara de video y un software adecuado se puede llevar a cabo un análisis similar al hecho por medio cálculos analíticos.

Bibliografía:

- W.Porter y R.Tremblay, “A medieval example of energy conservation”, *Physics Teacher*. **32**, 476 (1994)
- S.Gil, E.Rodriguez; *Física re-creativa*, Prentice Hall, Perú, 2001
- F.Sears, M.Zemansky; *Física universitaria*, Pearson Educación, vol I, México, 1999