

# Estudio del movimiento giroscópico

Elizabeth Aballay  
elizabethaballay@hotmail.com

Eduardo Avilés  
dagored@sion.com

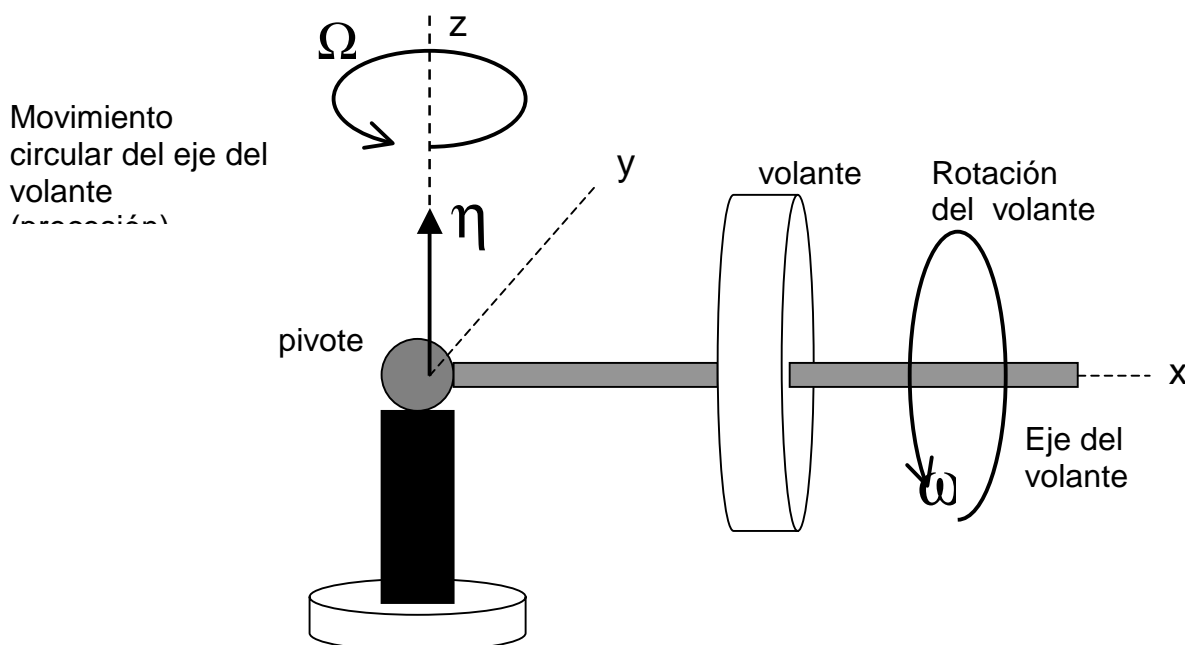
Laboratorio de Física I - 2° Año - Universidad Favaloro – Julio 2002

## Resumen

Se analizó el movimiento giroscópico, y en particular la precesión giroscópica cuando la velocidad angular de esta última es mucho menor que la velocidad angular de rotación. Como particularidad cabe decir que la toma de datos se realizó filmando el giróscopo en movimiento y luego analizando la filmación con una computadora y el programa VideoPoint v2.0.

## Introducción

Los giróscopos son objetos muy interesantes debido a que parecen desafiar la gravedad; Además, en ellos actúan diversos fenómenos físicos a causa de que el eje de rotación cambia de dirección en todo momento. Estas propiedades especiales de los giróscopos son muy importantes debido a que se aplican desde una bicicleta hasta en un sistema de navegación avanzado como puede ser un transbordador espacial. Nosotros nos dedicaremos al estudio del siguiente giróscopo:



El mismo, si lo sostenemos con el eje del volante horizontal y se suelta, cuando el volante no está girando, el extremo libre del eje cae debido a la gravedad. Si el volante gira, se produce un movimiento circular uniforme del eje en un plano horizontal, combinado con la rotación del volante alrededor del eje. Este movimiento del eje, no intuitivo, se denomina precesión.

Para el estudio de este fenómeno se relaciona el momento de torsión neto que actúa sobre un cuerpo y la razón a la que cambia el momento angular del cuerpo, dada por la ecuación:

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (1)$$

Cuando el volante gira alrededor de su eje de simetría,  $L_i$  está a lo largo del eje. Cada cambio del momento angular  $dL$  es perpendicular al eje, porque el momento de torsión  $\boldsymbol{\tau} = \vec{r} \times \vec{w}$  también lo es. Esto hace que cambia

la dirección de  $L$ , pero no su magnitud. Los cambios  $dL$  siempre están en el plano horizontal x-y, así que el momento angular y el eje del volante con el que se mueve siempre son horizontales. Es decir, el eje no se cae, tiene precesión. El cambio infinitesimal del momento angular es  $d\vec{L} = \vec{\tau} \cdot dt$ , que es perpendicular a  $L$ . Esto implica que el eje del volante del giróscopo giró un ángulo pequeño  $d\theta$  dado por  $d\theta = |d\vec{L}|/|L|$ . La razón a la cual se mueve el eje,  $d\theta/dt$ , se denomina velocidad angular de precesión:

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{|d\vec{L}|/|L|}{dt} = \frac{\tau}{L} = \frac{w \cdot r}{I \cdot \omega} \quad (2)$$

De modo que la velocidad angular de precesión es inversamente proporcional a la velocidad angular de giro alrededor del eje. Un giróscopo que gira rápidamente tiene precesión lenta; si la fricción hace que el volante se frene, la velocidad angular de precesión aumenta.

Al precesar un giróscopo, su centro de masa describe un círculo de radio  $r$  en un plano horizontal. La componente vertical de la aceleración es cero, así que la fuerza normal hacia arriba  $\eta$  ejercida por el pivote debe ser igual en magnitud al peso. El movimiento circular del centro de masa con una velocidad  $\Omega$  requiere una fuerza  $F$  dirigida hacia el centro del círculo, con magnitud  $F = m \cdot \Omega^2 \cdot r$ . Esta fuerza también debe ser proporcional al pivote.

El análisis del giróscopo anterior fue hecho suponiendo que el vector momento angular solo está asociado a la rotación del volante y es puramente horizontal. Sin embargo, también habrá una componente vertical del momento angular asociada a la precesión del giróscopo. Al ignorar esto, hemos supuesto tácitamente que la precesión es lenta; Es decir,  $\Omega$  es mucho menor que la velocidad angular de rotación  $\omega$ .

Como se comprobará por los datos experimentales, esto se cumple; por lo tanto, este modelo podría ser adecuado para el experimento.



Figura 1 – Giróscopo utilizado en el experimento. Es el modelo Pasco ME-8960.

## Método Experimental

El giróscopo utilizado es un giróscopo comercial, concretamente el modelo ME-8960 de pasco (figura 1). El mismo consiste de un trípode con una varilla metálica vertical, a la cual está unida otra varilla horizontal con movimiento en los tres ejes. La varilla horizontal posee en una punta un disco grande y una polea, ambos fijos. En la otra punta de la varilla, el giróscopo tiene dos contrapesos de distinto peso que pueden ubicarse en cualquier punto a lo largo de la misma.

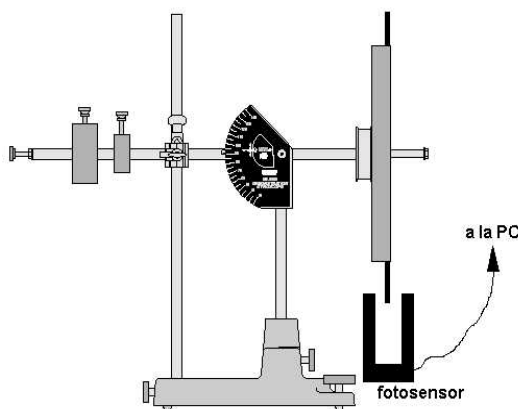


Figura 2 – Medición de la velocidad angular de giro

Como primer paso se marcó en el disco del giróscopo una línea de referencia visible. Luego se colocaron dos chapitas de metal perpendiculares al disco y diametralmente opuestas, que luego sirvieron para medir la velocidad angular de giro inicial por medio de un fotosensor y una computadora, manteniendo el giróscopo fijo sobre los ejes  $y$  y  $z$  (figura 2)

A continuación se colocaron los contrapesos a una determinada distancia en la varilla horizontal, y se impulsó el giróscopo tirando de una cuerda enrollada en la polea. Primero se filmó la rotación del disco con los ejes  $y$  y  $z$  fijos, sosteniendo el giróscopo con las manos, durante aproximadamente 5 segundos. Acto seguido se liberó el giróscopo y se siguió filmando el movimiento que el mismo describía. Este proceso se realizó para distintas posiciones de contrapesos y sentidos de giro del disco horario y antihorario.

Luego, lo filmado se digitalizó a una velocidad de 15 cuadros por segundo y se procesó con el VideoPoint.

## Resultados

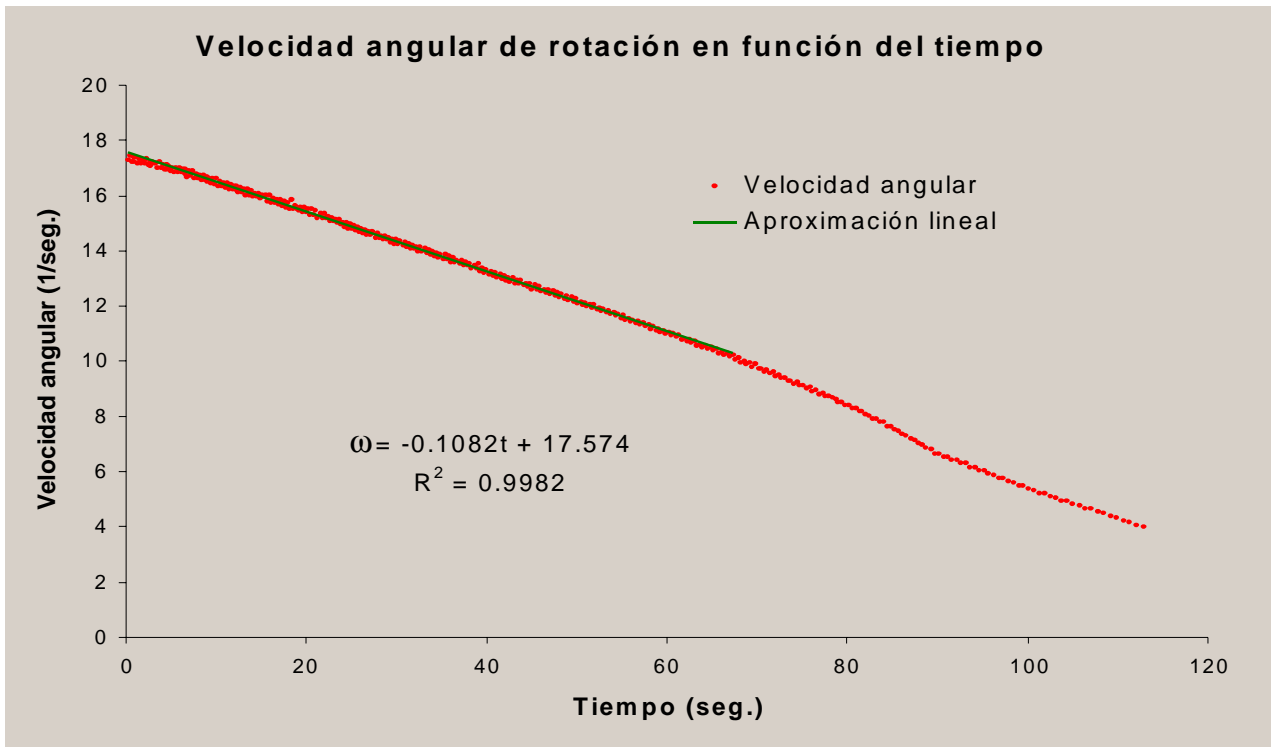


Figura 3 – Velocidad angular de rotación en función del tiempo. Se puede ver claramente que la parte no lineal se da con una velocidad relativamente baja.

En la figura 3 se muestra el gráfico de la velocidad angular de giro en función del tiempo. Se puede observar que el gráfico es lineal hasta cierto punto y luego tiene una curva de descenso al llegar a una velocidad angular baja. En este caso se aproximaron los datos por una recta, pero sólo con la parte lineal; esto se realizó así porque el rango de velocidades angulares utilizado en las mediciones de la precesión nunca llega hasta la parte no lineal.

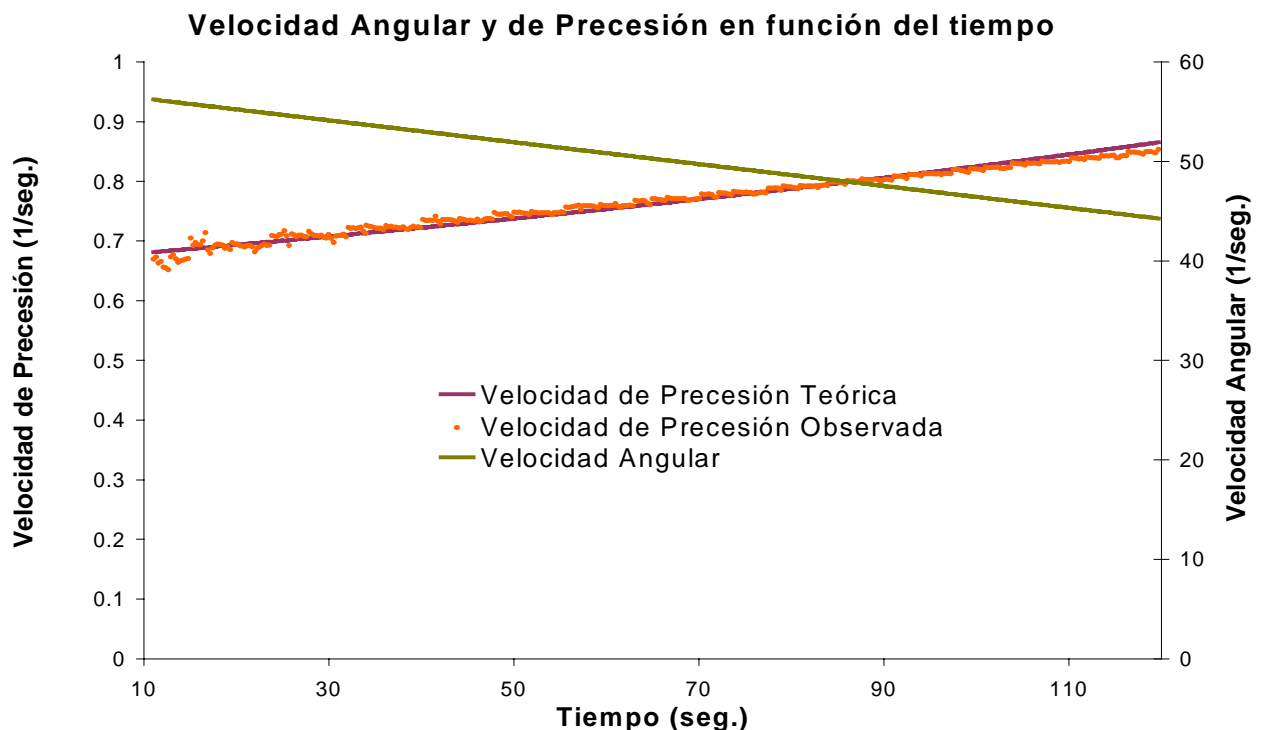


Figura 4 – Velocidades de precesión teórica y observada para la medición 2. Los datos se ajustan con un error del 0,8%. En el eje secundario se ilustra la velocidad angular. Se puede ver claramente que a medida que la velocidad angular disminuye, la velocidad de precesión aumenta.

Realizando tres mediciones de esta velocidad, podemos obtener la aceleración angular, que es el promedio de la pendiente de la recta de aproximación lineal de las tres mediciones tomadas.

Esta aceleración vale:

$$\alpha = (-0,109 \pm 0,001) \frac{1}{\text{seg}^2}$$

La misma se utiliza para extrapolar de la velocidad angular de giro inicial, la velocidad angular de giro en el transcurso del tiempo durante el cual se extrajo la velocidad de precesión. Luego, podemos generar un modelo teórico para ver cómo ajusta a nuestros datos experimentales. Para esto utilizamos la ecuación (2), para lo cual necesitamos el momento de inercia de la configuración en estudio y la distancia del centro de masa al eje de giro. Una vez calculados éstos, graficamos juntos los datos de la velocidad de precesión y la velocidad de precesión teórica. Esto se ilustra para la medición número 2 en la figura 4, y para la medición número 4 en la figura 5.

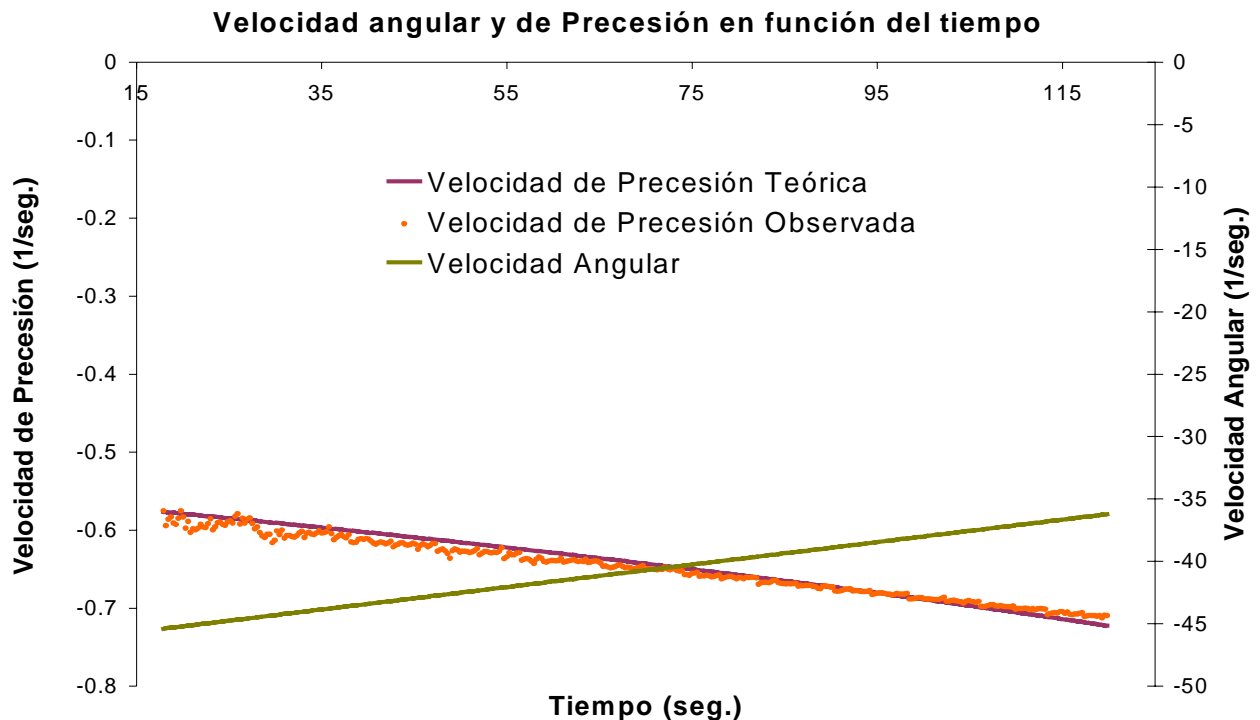


Figura 5 – Velocidades de precesión teórica y observada para la medición 4. Los datos se ajustan con un error del 1,1%. Se observa cómo al cambiar el sentido de giro del disco, cambia el sentido de giro de la precesión. Además, igual que en la figura 4, la velocidad de precesión es inversamente proporcional a la velocidad angular.

La diferencia en las figuras 4 y 5 es el sentido de giro del giróscopo, que a su vez hace cambiar el sentido de giro de la precesión.

En todas las mediciones se observó también una nutación o movimiento alternativo en el eje **y**, pero no se pudo medir por medio del método empleado para la toma de datos.

## Conclusiones

Del estudio de este sistema podemos concluir que el modelo teórico propuesto para la velocidad de precesión se ajusta correctamente a nuestras observaciones. También se observa cómo al ir disminuyendo la velocidad angular de rotación, la velocidad de precesión aumenta.

La no-linealidad de la velocidad angular de rotación de la figura 3 puede deberse a la fricción en los componentes del giróscopo.

El modo no muy común de analizar los datos por medio del VideoPoint fue una experiencia nueva. Podemos decir que se facilitó en cierta medida el trabajo ya que al tener filmado y digitalizado el experimento pudimos repasar una y otra vez el movimiento del giróscopo, no teniendo que hacer varios experimentos de más.

Algo digno de mencionar era la nutación, que por el instrumental utilizado no se pudo medir. La misma no era de mucha amplitud, pero se podía observar a simple vista. En las mediciones en que el centro de masa del sistema estaba desplazado hacia el lado de la polea, la nutación ocurría en ángulos por debajo del horizontal;

cuando el centro de masa estaba desplazado hacia el lado de los contrapesos, la nutación se daba en ángulos por encima del horizontal.

## Apéndice 1- Extracción de datos de la filmación

En este apéndice se relata la forma en que fueron tomados los datos de precesión por medio de la digitalización de la filmación del experimento.

Como la cámara se enfocó paralelamente al movimiento de precesión del giróscopo, no se pudo extraer directamente la velocidad de precesión, sino que se tuvieron que realizar varios cálculos extra.

La idea es que al mirar de costado un movimiento de rotación, el mismo se convierte en un movimiento armónico simple. Luego, para extraer de aquí el ángulo barrido en función del tiempo, se toma un punto de referencia "x" (en nuestro caso la unión de la polea con el disco) y se tabula la posición del mismo en función del tiempo. Como existe un movimiento de nutación, la distancia "a" será la norma de la posición del punto de referencia, o sea:

$$a = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3)$$

Pero por cada media revolución, existen pequeños errores al marcar el punto característico en el programa de toma de datos. Por eso, la distancia característica "d" en cada media revolución será el máximo de todos los "a" calculados en esa media revolución.

Al conocer la distancia característica "d", podemos calcular el desplazamiento angular por medio de la fórmula:

$$\theta = ACos\left(\frac{a}{d}\right) \quad (4)$$

Pero este a desplazamiento angular tenemos que ir sumándole o restándole  $2k\pi + \pi/2$ , siendo  $k=1,2,3,\dots$ , dependiendo de a que lado del eje se encuentre el punto dado. Si se encuentra a la izquierda, le restamos dicha cantidad. Si está a la derecha, se la sumamos. Así vamos obteniendo el ángulo barrido a lo largo del tiempo. Luego, realizamos una derivación numérica y obtenemos la velocidad de precesión experimental.

## Apéndice 2 – Características del Giróscopo y datos de mediciones

En este apéndice se da una tabla con los datos característicos del giróscopo utilizado y los valores de momento de inercia y centro de masa relevantes a cada medición tomada.

Datos del Giróscopo				
Elemento	Masa (Kg)	Distancia del centro de masa al eje de rotación (m)	Radio Exterior (m)	Radio Interior (m)
Disco	1.735	0.123	0.127	0.006
Polea	0.131	0.102	0.029	0.005
Contrapeso Grande	0.897	Variable	0.035	0.007
Contrapeso Chico	0.047	Variable	0.023	0.007
Varilla Larga	0.140	-0.108	0.007	
Varilla Corta	0.016	0.133	0.005	

Datos de las Mediciones					
Medición	Posición del contrapeso Grande (m)	Posición del contrapeso Chico (m)	Momento de Inercia (Kg•m <sup>2</sup> )	Velocidad angular inicial (1/seg)	Sentido de Giro
1	-0.255	-0.280	0.015	53.13	Horario
2	-0.160	-0.280	0.015	57.44	Horario
3	-0.155	-0.280	0.015	57.12	Horario
4	-0.280	No instalado	0.0145	47.21	Antihorario
5	-0.280	No instalado	0.0145	51.37	Horario

## **Bibliografía**

1. Gil, S. y Rodríguez E., *Física re-Creativa*, 1ra. Ed.- Buenos Aires: Prentice Hall, 2001.
2. Meyer, P., *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*, 2da. Ed.- México: Prentice Hall, 1998.
3. Sears, F. *Et al*, *Física Universitaria Vol. 1*, 9a. Ed.- México: Addison Wesley Longman, 1999.
4. <http://www.andrews.edu/~kingman/research/aapt98/gyro982/index.html>: Kingman, R. Y Rowland, S., *Modeling the Precession and Nutation of a Gyroscope*, University of Nebraska, Lincoln, Nebraska – AAPT 1998 Summer Meeting; modelo teórico de un giróscopo con precesión y nutación; datos del giróscopo utilizado en el experimento.