

Comportamiento del péndulo cicloidal en relación con un péndulo simple

Universidad Favaloro: Facultad de ingeniería- Julio 2001.

Autores: Juan Patricio Casasco casasco_jp@yahoo.com
Andrés Fernández Valoni andresfvaloni@usa.net
Julieta Romani julietaromani@usa.net

Resumen

El objetivo de nuestro experimento es comparar el comportamiento de un péndulo cicloidal con el de un péndulo simple. Para este estudio, determinamos la variación del periodo en función de la amplitud para ambos péndulos. También estudiamos el comportamiento del péndulo cicloidal para distintas longitudes del hilo. Concluimos que el periodo del péndulo cicloidal no depende de la amplitud angular, mientras que el periodo del péndulo simple, si lo hace.

Introducción

La curva cicloide es el lugar geométrico descrito por un punto **p** ubicado en el borde de una circunferencia de radio **a** cuando esta se rototranslada sin deslizar a lo largo de una línea recta (como se muestra en la figura 1).

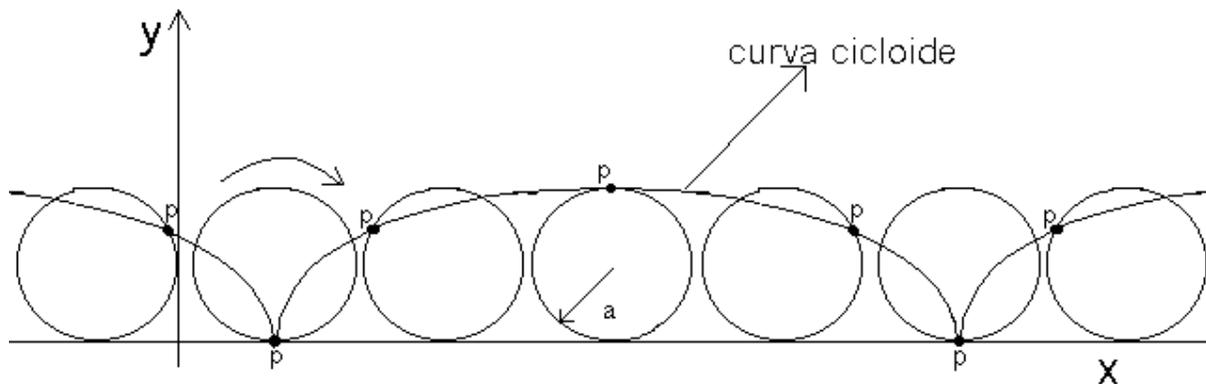


Figura 1. Formación de la curva cicloide a través del punto **p** ubicado en la circunferencia que esta rotando.

Otra propiedad de esta curva fue descubierta por Johannes Bernoulli en 1727 ¹, quien demostró que para hacer llegar una bola dejándola rodar desde un punto A a un punto B ubicado mas abajo sobre una línea vertical distinta de la que pasa por A en un tiempo mínimo, se necesita hacer rodar la bola sobre una curva cicloidal como se muestra en la Figura 2, y el tiempo **t** que tardara en llegar será

$$t = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2a}{g}} \quad (1)$$

Siendo $2a$ la diferencia de alturas entre A y B y 2 veces el radio del círculo con el que se creó la curva cicloidal.

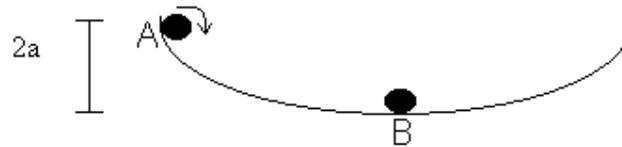


Figura 2. Desplazamiento de una bola a través de una curva cicloide.

La curva cicloide fue nombrada por primera vez por Galileo en 1599 ². En los años fue principalmente estudiada por Nicholas Cusa al estudiar el área de un círculo mediante la integración y Mersenne dio la primera definición acerca de la curva cicloide y dedujo algunas propiedades. Una de ellas es que la longitud de la base es igual a la longitud de la circunferencia en rotación⁴. A partir de conocimientos obtenidos por experimentos realizados anteriormente, podemos afirmar que, en un péndulo simple el periodo de oscilación varía de acuerdo con la amplitud de oscilación, cuanto menor sea el ángulo, menor será el periodo hasta tener ángulos del orden de los 10° en los cuales el periodo se mantiene aproximadamente constante. El periodo (T) de un péndulo simple de longitud (L) con ángulo de amplitud θ_0 está dado por ³

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \left(1 + \frac{\lambda^2}{4} + 9 \cdot \frac{\lambda^4}{64} + \dots \right) \quad (2)$$

donde $\lambda = \text{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$.

En el péndulo cicloidal se espera que el periodo sea el mismo independientemente de la amplitud, además será igual al periodo del péndulo simple cuando tengan la misma longitud y estén oscilando en pequeñas amplitudes, por lo tanto la fórmula de su periodo es igual a la ecuación (2).

El objetivo de este experimento es verificar experimentalmente estas expectativas teóricas.

Experimento

Para la toma de mediciones se realizo el dispositivo que se observa en la figura 1.

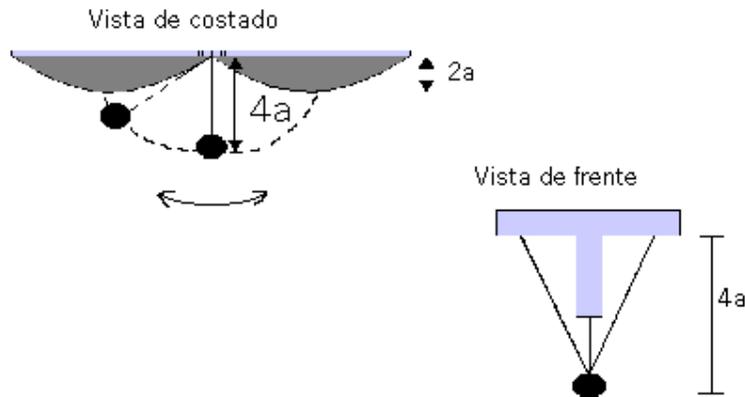


Figura 1. Se pueden observar las diferentes perspectivas del dispositivo. Además desde la vista de costado se puede apreciar que el péndulo describe una curva cicloidal en su movimiento de oscilación. También se agregó un fotointerruptor a la altura de la masa para realizar las mediciones. $2a$ es la distancia desde la base del péndulo hasta el valor máximo que alcanza la curva cicloidal.

El dispositivo se realizó con madera, teniendo en cuenta para su construcción la ecuación de la curva cicloidal:

$$\begin{aligned} X &= a(\phi + \sin \phi) \\ Y &= a(1 + \cos \phi) \end{aligned} \quad -\pi < \phi < \pi \quad (3)$$

Donde a representa el radio de una circunferencia imaginaria que rota sobre el eje x . Se realizaron mediciones del período de un péndulo cicloidal, donde la longitud del hilo era $4a$ (29cm). Mediante la utilización de un fotointerruptor conectado a una PC, obtuvimos los períodos en función del tiempo para dicha longitud. Dado que debido al roce, la amplitud disminuye con el tiempo, es de esperar que la amplitud disminuya monótonamente con el tiempo. También se realizó el mismo procedimiento pero para longitudes de 19cm y 43cm. Además para cada longitud se tomaron varias mediciones y se eligió la de menor error experimental.

El experimento se realizó sujetando firmemente el dispositivo mediante morsas a una mesa para reducir, en lo posible, las vibraciones.

También se estudió el período en función del tiempo para el péndulo simple, observando el comportamiento del período en función del tiempo, para luego poder comparar ambos resultados.

Resultados

Se muestran las mediciones realizadas para ambos péndulos en la figura 2.

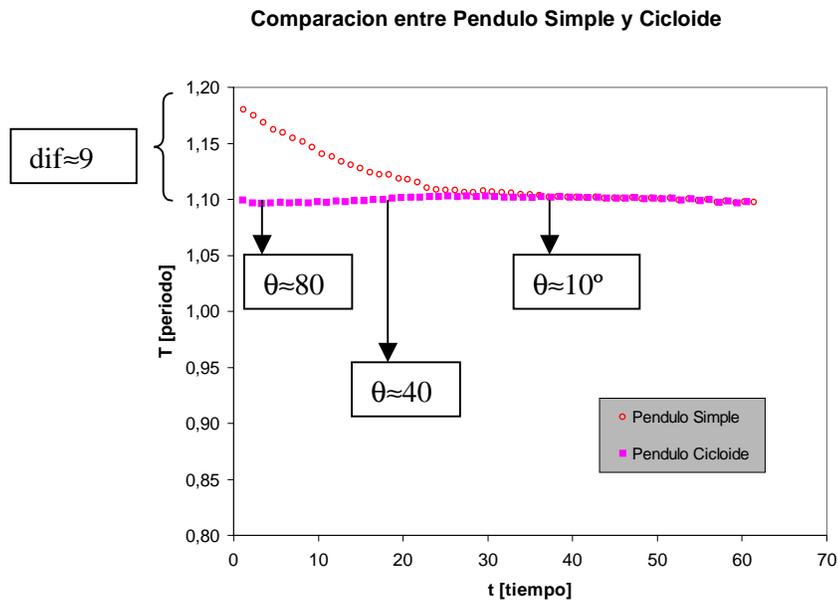


Figura 2. Período en función del tiempo para los dos péndulos. Para pequeñas amplitudes (tiempos grandes) ambos periodos coinciden.

El periodo del péndulo simple, disminuye a medida que pasa el tiempo, A partir de los 10° esta variación es casi imperceptible por nuestro instrumento de medición. Así mismo vemos que el periodo del péndulo simple converge con el periodo del péndulo cicloidal de la misma longitud.

En la figura 3 se analiza el comportamiento del péndulo cicloidal pero con distintas longitudes.

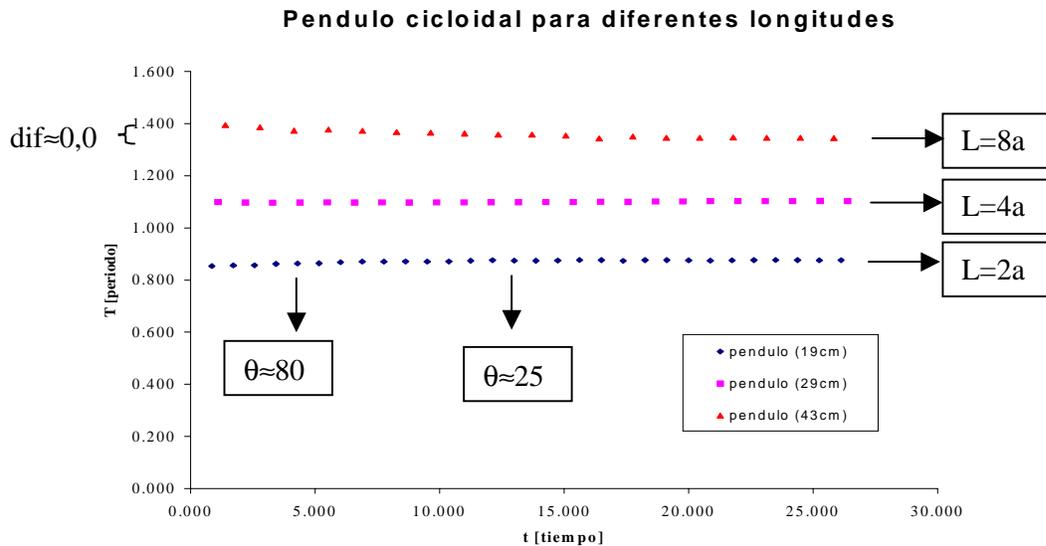


Figura 3. Período en función del tiempo para las distintas longitudes del péndulo cicloidal.

Como podemos ver a partir de este gráfico, variando las longitudes del péndulo cicloidal se pierde gradualmente el isocronismo, ya que solamente se cumple lo antedicho si el largo es $4a$. Podemos observar que al aumentarle la longitud el período decae hasta el ángulo de 10° en donde empieza a permanecer constante al igual que el péndulo simple. En cambio en el caso en que se disminuye la longitud el período va aumentando hasta permanecer constante luego de los 10° . Así mismo vemos, comparando las figuras 2 y 3, que la variación del período con la amplitud, de péndulos cicloides con $2^a < L < 8^a$ es menor (diferencia $\approx 0,09\%$) que la observada para un péndulo simple (diferencia $\approx 9\%$).

Conclusión

Finalmente llegamos a la conclusión que el período de un péndulo simple varía dependiendo de la amplitud.

Por otra parte un péndulo cicloidal tiene un período que no depende de la amplitud. El péndulo simple tiene un período que en el límite de amplitudes pequeñas coincide con el péndulo cicloidal de igual amplitud.

Esta propiedad (isocronismo) del péndulo cicloidal se preserva muy aproximadamente de la longitud del mismo varía en más del 100% de su valor teórico.

Bibliografía

1. <http://usuarios.bitmailer.com/eduguzman/GeometLab/ecua.htm>
2. www.pntic.mec.es/Descartes/Geometria/Curvas_especiales/j2.htm
3. Física Universitaria, 9th Edición, Sears, Zemansky, Freedman y Young. Editorial Addison-Wesley Longman. Volumen 1. México 1999.