

Estudio físico del movimiento de Tiro Oblicuo

Ariel H. Rodríguez, Jennifer S. Wakstein

arielloft11@gmail.com, jennysol@gmail.com

Laboratorio de Física 1 – Universidad Favaloro- 2005

Resumen

Este trabajo se basó en el estudio del movimiento de tiro oblicuo considerando el rozamiento del aire sobre el proyectil. Para eso se aplicaron los conceptos físicos de cinemática y dinámica de cuerpos y fluidos. Se realizó un experimento que consistió en una serie de disparos de pelotitas de ping-pong; en cada uno de ellos se varió el ángulo de disparo. Luego, los resultados experimentales obtenidos se analizaron con un software de video y se lo comparó con el desarrollo teórico, tanto con como sin rozamiento.

Introducción

Un proyectil es cualquier cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria determinada por los efectos de la aceleración gravitacional y la resistencia del aire. Una bola golpeada con el pie, una pelota lanzada, un paquete soltado desde un avión y una bala disparada por un arma son proyectiles. El camino que sigue un proyectil es su trayectoria.

Se analizará el movimiento de proyectiles sólidos. Dicho movimiento está limitado a un plano vertical determinado por la dirección de la velocidad inicial. La razón es que la aceleración debida a la gravedad es puramente vertical, esta no puede mover un proyectil lateralmente.

Si se considera que la resistencia del aire es despreciable, nos encontramos con unas ecuaciones que son solución del problema de tiro de proyectiles que son familiares:

$$x = x_0 + (v_0 \cdot \cos \theta) \cdot t \quad (1a)$$

$$y = y_0 + (v_0 \cdot \sin \theta) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (1b)$$

$$v_x = v_0 \cdot \cos(\theta) \quad (1c)$$

$$v_y = v_0 \cdot \sin(\theta) - g \cdot t \quad (1d)$$

Ecuaciones (1a): Posición en x (horizontal) en función del tiempo, **(1b):** Posición en y (vertical) en función del tiempo, **(1c):** Velocidad en x (horizontal), **(1d):** Velocidad en y (vertical). Donde v_0 es la velocidad inicial, x e y la posición en los ejes x e y respectivamente, t el tiempo y θ es el ángulo que forma la velocidad horizontal con respecto a la velocidad tangencial ⁽²⁾.

Sin embargo, para ciertos casos en la práctica, la resistencia del aire no puede ser despreciada y es necesario incluir en las ecuaciones de movimiento una respectiva fuerza de rozamiento.

Para determinar la forma que tendrá esta fuerza de rozamiento debemos calcular un parámetro característico denominado "número de Reynolds", el cual está dado por:

$$Re = \frac{2 \cdot r \cdot \rho \cdot v}{\mu} \quad (2)$$

En esta ecuación r es el radio de una esfera que se mueve con velocidad v , en un fluido de densidad ρ y viscosidad μ ⁽¹⁾.

Si $Re < 1$, entonces la fuerza de rozamiento es de la forma:

$$F_{roce} = 6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r \cdot v \quad (3)$$

Ecuación (3) Ecuación de Stokes ⁽³⁾, donde μ es la viscosidad del medio y r es el radio de una esfera que se mueve con velocidad v en el mismo.

Si $Re \gg 1$, la fuerza de rozamiento es la siguiente:

$$F_{roce} = \frac{1}{2} \cdot C_d \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 \quad (4)$$

Ecuación (4): Fuerza de rozamiento para Reynolds mucho mayor a 1, donde A es el área transversal del cuerpo (πr^2 , para una esfera), v es la velocidad del mismo, ρ la densidad del medio donde se mueve y C_d , un coeficiente numérico cuyo valor depende de Re y la forma del objeto. El valor de C_d se determina experimentalmente. ⁽⁴⁾

Método experimental

El experimento consistió en ejecutar una serie de disparos utilizando como proyectil una pelotita de ping-pong y un dispositivo disparador consistente de dos maderas unidas por una bisagra. Sujeta a una de estas maderas (la móvil) se colocó, en su parte superior, un caño de PVC en cuyo interior se dispuso el mecanismo propulsor (base para el proyectil - eje metálico - resorte) y unido a su parte inferior, otra bisagra y una traba para graduar los diferentes ángulos de disparo.

Se colocó un sistema de ejes coordenados en el punto inicial del disparo, hecho de cable blanco y escalado cada 10 cm. con cinta aislante negra.

Se comenzó el experimento colocando el dispositivo en estado de reposo (**Figura 1a**), en el sistema de ejes coordenados. Luego se procedió a comprimir el resorte (**Figura 1b**) y a realizar una serie de disparos que fueron filmados con la cámara digital ⁽⁵⁾; los ángulos a los cuales se efectuaron los mismos fueron: 15°, 30°, 45°, 60° y 75°.

Con el software ⁽⁴⁾ se marcó el origen de los ejes coordenados y cómo estaba ubicado cada uno, indicando también la leve inclinación de 1°. Luego se indicó la longitud de cada eje, de tal manera que el programa pudiera relacionar el tiempo con el espacio.



Figura 1a y 1b: Diagramas esquemáticos del aparato disparador de pelotitas de ping-pong. Sistema con resorte en reposo (1a). Sistema con resorte comprimido (1b).

Lo primero que se realizó fue calcular la velocidad inicial, a partir de las 2 primeras coordenadas de posición y del intervalo de tiempo entre las mismas, de la forma:

$$v_0 = \frac{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}{(t_1 - t_0)} \quad (5)$$

donde v_0 es la velocidad inicial, x_0 y y_0 son las coordenadas al tiempo t_0 , y x_1 y y_1 son las coordenadas al tiempo t_1 (estas coordenadas son experimentales). Estos datos iniciales se obtuvieron del software.

Luego, por trigonometría se obtuvieron las velocidades iniciales en las direcciones x y y , respectivamente:

$$v_{x0} = v_0 \cdot \cos(\theta_0) \quad (6a) \quad v_{y0} = v_0 \cdot \sin(\theta_0) \quad (6b)$$

donde θ_0 es el ángulo inicial al que sale disparada la pelotita. A este ángulo lo conocemos, ya que el dispositivo está graduado al mismo.

Con la velocidad inicial v_0 , se determinó el número de Reynolds, utilizando la fórmula (2) y se obtuvo un Reynolds del orden de 7000. Como podemos ver el Reynolds es mucho mayor que la unidad ($Re \gg 1$), por lo tanto se calculó con la fórmula (4), la fuerza de rozamiento, F_{roce} .

Aplicando la segunda Ley de Newton en la dirección x y y , tenemos:

$$F_{x0} = m \cdot a_{x0} = F_{roce0} \cdot \cos(\theta_0) \quad (7a) \quad F_{y0} = m \cdot a_{y0} = F_{roce0} \cdot \sin(\theta_0) - m \cdot g \quad (7b)$$

donde F_{x0} , a_{x0} y F_{y0} , a_{y0} , son la fuerza y la aceleración al tiempo t_0 en las dirección x y y , respectivamente, m es la masa de la pelotita y g es la aceleración gravitatoria.

Despejando las aceleraciones:

$$a_{x0} = \frac{F_{roce0} \cdot \cos(\theta_0)}{m} \quad (8a) \quad a_{y0} = \frac{F_{roce0} \cdot \sin(\theta_0) - m \cdot g}{m} \quad (8b)$$

calculamos ahora las velocidades v_{x1} y v_{y1} al tiempo t_1 :

$$v_{x1} = v_{x0} + a_{x0} \cdot dt \quad (9a) \quad v_{y1} = v_{y0} + a_{y0} \cdot dt \quad (9b)$$

donde $dt = t_1 - t_0$.

La velocidad v_1 está dada por:

$$v_1 = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2} \quad (10)$$

y el ángulo θ_1 lo está por:

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{v_{y1}}{v_{x1}}\right) \quad (11)$$

Ahora, se calculan las coordenadas al tiempo t_1 de la forma:

$$x_1 = x_0 + v_{x0} \cdot dt \quad y_1 = y_0 + v_{y0} \cdot dt \quad (12)$$

y luego, con todos estos datos, se vuelve a repetir el procedimiento para el tiempo t_2 y así sucesivamente.

Resultados y discusión

Se analizó uno de los videos (ángulo de disparo 60°) con el software ⁽⁴⁾ que también permitió la edición de éste, permitiendo analizar solo el movimiento deseado y descartar lo que lo que no era útil. Dicho software nos indicó también que se tenían 15 imágenes por segundo de filmación. Cada una de ellas representaba un instante de tiempo con su respectiva posición. A partir de dichos tiempos y posiciones se realizó una tabla y gráfico con Excel (Figura 2).

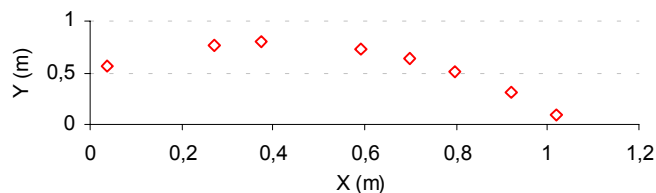


Figura 2: Gráfico de posición experimental

Utilizando desde la fórmula (5) hasta la (12) se realizó el desarrollo teórico, determinando con ellas las posiciones que debería alcanzar la pelotita y graficando las mismas (Figura 3).

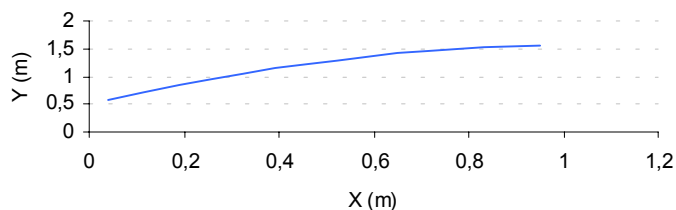


Figura 3: Gráfico de posición teórica

Se compararon ambas curvas, obteniendo como resultado una diferencia notable (Figura 4).

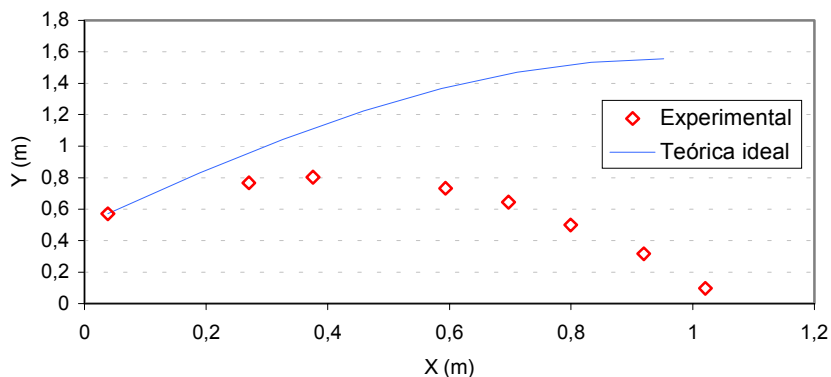


Figura 4: Comparación de las curvas experimental con la teórica

Se intentó que ambas curvas coincidieran, para esto se fue variando gradualmente la velocidad inicial y el ángulo de disparo con una aplicación del Excel. Resultó que la velocidad inicial debería ser del 56% de la experimental y que, con un ángulo inicial de 51° , las curvas coincidían (Figura 5). Otra forma de igualar las curvas fue modificando el coeficiente de rozamiento, donde el que más ajustó es 0.4.

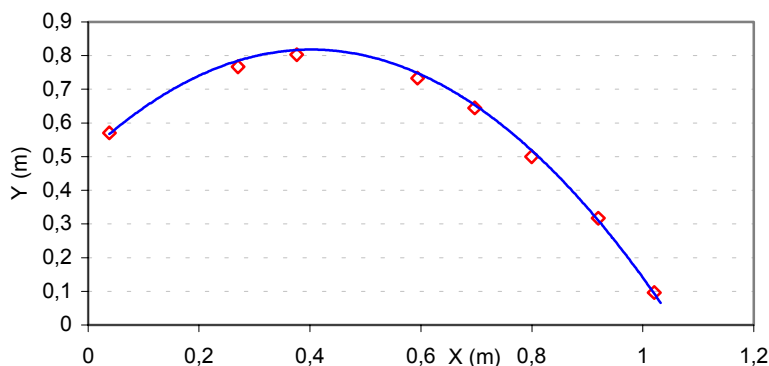


Figura 5: Comparación de las curvas experimental con la teórica, con cambios en ángulo y velocidad inicial

Si al comenzar nuestro análisis de los datos no hubiésemos realizado un estudio previo acerca del número de Reynolds y del modelo sobre el cual trabajaríamos, habríamos obtenido una diferencia mucho más significativa entre los resultados teóricos y la práctica. Eso lo demuestra la **Figura 6**, en la cual se graficó las posiciones obtenidas con el mismo desarrollo teórico anterior, pero despreciando la resistencia del aire y por lo tanto haciendo $F_{roce} = 0$.

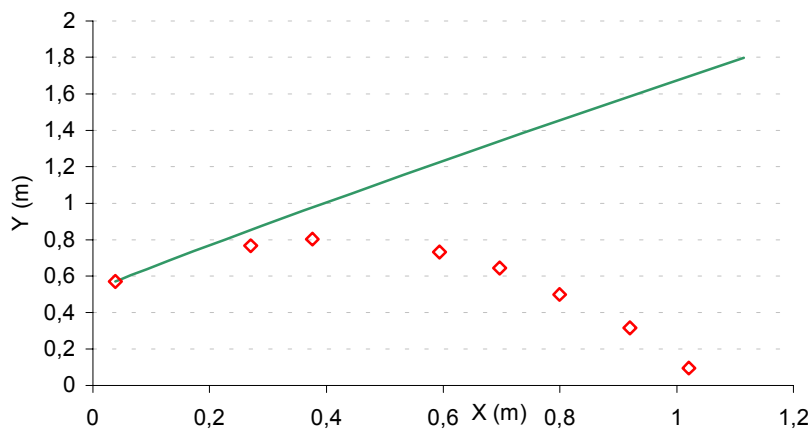


Figura 6: Comparación de las curvas experimental con la teórica despreciando rozamiento

Conclusión

A partir de los resultados obtenidos en la práctica, contrastados con el desarrollo teórico, se ha llegado a la conclusión de que la resistencia del aire juega un rol fundamental en este experimento. El rozamiento afecta de manera notable los resultados.

Se ha visto que si no se la considera en las ecuaciones de movimiento en un experimento como el nuestro, en el que es necesario incluirla, se llegan a resultados que distan significativamente de lo que se observa en la práctica.

En la experiencia existe una fuerza que es proporcional al cuadrado de la velocidad del proyectil y que siempre se opone al movimiento de éste. Esta fuerza es contraria al movimiento, o sea es opuesta a la velocidad. Eso hace que la velocidad horizontal (en x) no sea constante sino vaya decreciendo a lo largo del tiempo.

Si despreciamos la resistencia del aire y graficando las posiciones y vs. x , observamos que la trayectoria teórica no se parece a los datos obtenidos.

Vimos que si consideramos la fuerza de roce, correspondiente a un número de Reynolds mucho mayor que 1 en el desarrollo teórico, la curva adquiere una forma que es compatible con los resultados obtenidos.

Referencias

1. S. Gil, E. Rodríguez, "Física re-Creativa", Prentice Hall, Buenos Aires, 2001.
2. F. Sears, M. Zemansky, H. Young, "Física Universitaria", Ed. Addison Wesley-Longman, Mexico DF, 1998.
3. G.W. Parker, "Projectile motion with air resistance quadratic in the speed", Am. J. Phys., Vol. 45, No. 7, 606 (July 1977).
4. VideoPoint Physics Fundamentals, M. Luetzelschwab, P. Laws, M. Gile, Workshop Physics Program at Dickinson College in Carlisle, Lenox Softworks Inc, <http://www.vpfundamentals.com/>
5. Kodak Easyshare CX7330, 3.1 megapixels, 15 fps.