

# Estudio de la cinemática relativista del electrón: el efecto Compton

HERNÁN D. REISIN\* Y SEBASTIÁN J. FERRARA\*\*

Laboratorio 5 - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires  
Septiembre 2004

*En este trabajo se estudia la cinemática del electrón libre al ser bombardeado con fotones de alta energía utilizando el modelo de choque elástico. Para ello, se analizaron los espectros de energía obtenidos con un contador de centelleo de NaI(Tl) irradiado con rayos gamma provenientes del decaimiento radiactivo de varias muestras de isótopos inestables. A partir de dicho análisis se contrastaron los enfoques newtoniano y relativista de la interacción. Los resultados indican la necesidad de un tratamiento relativista para el choque "fotón de alta energía"-“electrón libre”, fenómeno que recibe el nombre de Efecto Compton. Como resultado del análisis medimos la masa en reposo del electrón obteniéndose como resultado que  $m_0c^2 = (490 \pm 36)KeV$ .*

## 1. Introducción

Los rayos gamma pueden ser tratados como ondas electromagnéticas o como partículas denominadas fotones. En fenómenos que involucran altas energías la descripción corpuscular resulta necesaria para describir los principales tipos de interacción posibles: el efecto fotoeléctrico, el efecto Compton y la creación de pares. En el primer caso la energía ( $E_\gamma$ ) del fotón incidente es íntegramente cedida al (foto)electrón que escapa del pozo de potencial de confinamiento con una energía cinética  $T = E_\gamma - U$  (donde  $U$  es la energía de ligadura del electrón). En el tercer caso (que puede ocurrir sólo si  $E_\gamma > 1,022MeV$  y en presencia de un campo electromagnético intenso, como ocurre en las cercanías de un núcleo atómico) el fotón desaparece y se produce un par electrón-positrón a expensas de la energía del fotón incidente. En esta experiencia se estudia particularmente el segundo tipo de interacción en el cual luego de la interacción entre el fotón y un electrón cuasi-libre (electrón cuya energía de ligadura es mucho menor que la energía del fotón incidente), el estado final del sistema está constituido por un electrón libre y un nuevo fotón.

Para ello se irradió un cristal centellador de NaI(Tl) (Ioduro de Sodio dopado con Talio) con fotones gamma en el rango de energías (400 ~ 1750) KeV prove-

nientes de la radiación gamma emitida por núcleos de  $^{207}Bi$ ,  $^{22}Na$ ,  $^{60}Co$ ,  $^{137}Cs$  excitados en su transición a niveles nucleares más bajos. Para el sensor utilizado, en dicho rango de energías se puede asumir que el efecto Compton es dominante frente a los otros tipos de interacción.

### 1.1. Modelo Teórico

Para estudiar la colisión elástica se caracterizó al fotón por una energía  $E_\gamma$  y una cantidad de movimiento  $p_\gamma$  y al electrón por una energía cinética  $T$  y una cantidad de movimiento  $p_e$ .

En la figura 1 se representa el proceso de interacción.

Por la conservación del momento lineal durante la interacción bidimensional considerando (sin pérdida de generalidad) al electrón inicialmente en reposo y al fotón incidente en la dirección  $x$ , se obtiene:

$$p_\gamma = p'_e \cos \varphi + p'_\gamma \cos \theta \quad (1)$$

$$0 = p'_\gamma \sin \theta - p'_e \sin \varphi \quad (2)$$

La notación corresponde a la indicada en la figura 1. Reordenando los términos, elevando al cuadrado y sumando ambas ecuaciones se obtiene:

$$p_e'^2 = p_\gamma^2 + p_\gamma'^2 - 2p_\gamma p_\gamma' \cos \theta \quad (3)$$

\*Email: hreisin@hotmail.com

\*\*Email: shaf@fullzero.com.ar

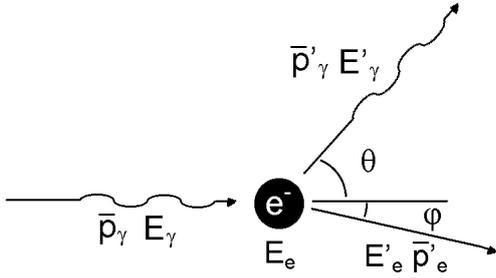


Figura 1: Esquema de la colisión fotón-electrón. Ambas partículas poseen un momento y una energía que varía luego de la interacción. Las magnitudes primadas indican los valores luego del choque.

Por otro lado la conservación de la energía requiere que:  $E_\gamma = T + E'_\gamma$ , donde  $T$  es la energía cinética del electrón luego del choque, y nuevamente se consideró al electrón inicialmente en reposo. Además se tiene que la energía y el momento del fotón están relacionados por:  $E = pc$  (nótese que ya en esta instancia se requiere una descripción cuántica del fotón dada por esta relación de Planck-Einstein). Reemplazando estas dos últimas relaciones en la ecuación (3) y reordenando se obtiene:

$$c^2 p_e'^2 = 2E_\gamma(E_\gamma - T)(1 - \cos\theta) + T^2 \quad (4)$$

En esta ecuación las magnitudes  $T$  y  $p'_e$  son funciones de  $(\theta)$ . Sin embargo, como se describe más adelante, las únicas magnitudes medibles en este experimento son  $T_{max}$  (que corresponde a la máxima energía cinética con la que puede escapar el electrón luego del choque) y  $E_\gamma$ . Por lo tanto, es necesario reescribir la ecuación (4) en función de aquellas variables, únicamente. Para ello, es necesario primero establecer la relación entre la energía cinética del electrón y su momento lineal.

Debe remarcarse que es en este momento en el cual la deducción general del choque (ecuación (4)) se divide en dos soluciones excluyentes pues deben considerarse los modelos clásico (en el sentido no-relativista) y el modelo relativista.

**Caso clásico.** La relación entre la cantidad de movimiento y la velocidad cinemática está dada por  $p = mv$ , por lo tanto la energía cinética está dada por:  $T = \frac{p_e^2}{2m_{nr}}$ , donde se ha llamado  $m_{nr}$  a la masa inercial no-relativista.

Reemplazando esta expresión en la ecuación (4), derivando con respecto a  $\theta$  y pidiendo que  $\frac{dT}{d\theta} = 0$  (condición extremal para  $T = T_{max}$ ), se obtiene que  $\theta = 0, \pi$ . Como  $\theta = 0$  significa la ausencia de interacción, es correcto solo considerar  $\theta = \pi$ . Con esta condición, se obtiene la siguiente ecuación para la masa no-relativista del electrón:

$$m_{nr}c^2 = \frac{(2E_\gamma - T_{max})^2}{2T_{max}} \quad (5)$$

Según el modelo no-relativista (mecánica newtoniana), la masa inercial  $m_{nr}$  es una propiedad intrínseca y constante de la partícula. Por otro lado, experimentalmente la velocidad de la luz  $c$  es también constante. En consecuencia, un modo de probar la invalidez del modelo no-relativista sería la determinación de una no constancia del miembro derecho de la ecuación (5).

**Caso relativista.** En este caso la relación entre el momento del electrón y su energía cinética es:  $T = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2$ . Reemplazando esta expresión en la ecuación (4), derivando con respecto a  $\theta$  y pidiendo que  $\frac{dT}{d\theta} = 0$ , se obtiene nuevamente que  $\theta = 0, \pi$ . Al igual que en el caso anterior es correcto solo considerar  $\theta = \pi$ , reemplazando se obtiene la siguiente ecuación para la masa en reposo del electrón:

$$m_0 c^2 = \frac{2E_\gamma}{T_{max}} (E_\gamma - T_{max}) \quad (6)$$

En este caso, la masa relativista en reposo también es (según el paradigma relativista) una constante. Así, las ecuaciones (5) y (6), quedan expresadas en función de las variables medibles del experimento y permiten contrastar la validez de cada uno de los dos modelos en forma simultánea.

## 2. Arreglo experimental

### 2.1. Detección de rayos gamma y dispositivo experimental.

Como se describió en la introducción, los fotones de alta energía interactúan con la materia mediante tres fenómenos que tienen en común la producción de electrones acelerados. Dado que los fotones son partículas sin carga, éstos son detectables indirectamente a través observaciones de los electrones libres producidos en cada interacción. En particular, para este estudio, los fotones gamma incidentes fueron detectados utilizando un cristal centellador de NaI(Tl) acoplado a un fotomultiplicador (PMT). En este dispositivo un alto porcentaje de los fotones gamma interactúa con los electrones de la materia que compone el cristal centellador transfiriéndoles parte (cuando la interacción es Compton) o la totalidad (producción de fotoelectrones) de su energía original. Cada electrón acelerado en la colisión (o absorción) excita la red cristalina produciendo la emisión de fotones visibles (V) y ultravioleta (UV) secundarios, cuyo número es proporcional a la energía del electrón excitado. Luego, los fotones V/UV excitan un fotocátodo que desprende "electrones secundarios" por efecto fotoeléctrico. Cada uno

de estos electrones es acelerado y dirigido hacia un electrodo (llamado dinodo), el cual, al colisionar, libera un numero  $n$  de electrones que son nuevamente acelerados hacia el siguiente electrodo. De este modo, se obtiene a la salida del PMT un pulso de tensión cuya amplitud es proporcional al número de fotones V/UV producidos en el centellador. Dicho pulso de tensión es amplificado, conformado, y su altura es registrada por un analizador multicanal que digitaliza la señal amplificada asociando a cada amplitud de señal un canal de digitalización. Sintéticamente el proceso completo se puede indicar como: número de canal  $\propto$  amplitud de corriente a la salida del PMA  $\propto$  # fotoelectrones desprendidos en el fotocátodo  $\propto$  # fotones V/UV  $\propto$  energía depositada por el fotón gamma en el centellador (donde # indica "cantidad de").

En la figura 2 puede observarse un esquema de los instrumentos utilizados en el dispositivo experimental.

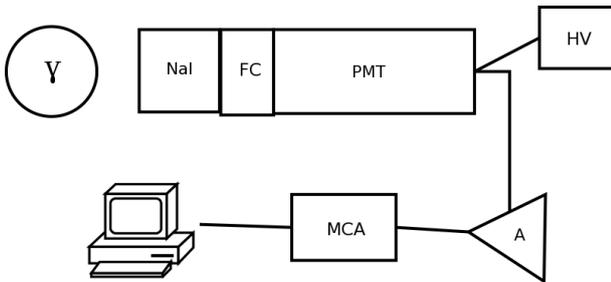


Figura 2:  $\gamma$ : Fuente de radiación gamma. NaI: Cristal centellador de NaI. FC: fotocátodo. PMT: fotomultiplicador. HV: fuente de altatensión. A: amplificador. MCA: multicanal

Finalmente, se construye un histograma del número de eventos (cuentas) ocurridos para cada canal reconstruyendo estadísticamente el espectro de emisión del compuesto radiactivo.

## 2.2. Medición de los espectros de radiación.

**Forma del espectro de radiación.** Según lo descrito anteriormente la energía medida por el conjunto centellador-fotomultiplicador corresponde a la energía de los electrones acelerados luego de la interacción con los fotones gamma. Así, el espectro de energías obtenido por este dispositivo experimental provee las posibles energías de un electrón, inicialmente quasi-libre, luego de la interacción con un fotón gamma. En la figura 3 se puede observar esquemáticamente un histograma típico. El espectro de energía de una fuente está principalmente conformado por:

- Un pico dominante dado por un fotopico centrado en

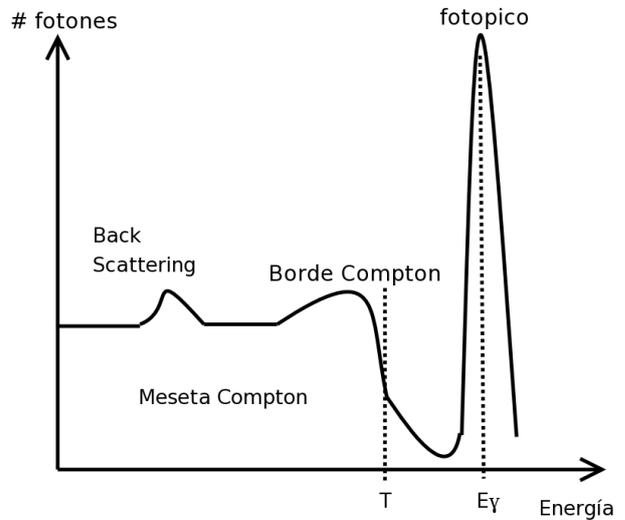


Figura 3: Histograma esquemático típico registrado donde pueden apreciarse sus principales características.

la energía de los electrones que tomaron la totalidad de la energía del foton gamma.

- Una región continua del espectro de energía "meseta Compton" debida a que, luego de la interacción Compton, el electrón deja toda su energía en el detector y el fotón se escapa (no depositando su energía en el mismo).
- Un borde Compton, cuya posición indica la máxima energía que puede ser transferida a los electrones por una colisión Compton (ecuaciones (5) y (6)).
- Un pico de *back-scattering*, que corresponde a la energía de los fotones que son retrodispersados en el medio circundante y luego reingresan al detector.

En general, los histogramas experimentales, presentan perfiles adicionales (como ser la presencia de cuentas entre el borde Compton y el fotopico) que están asociadas con interacciones Compton secundarias, resolución y tamaño finito del detector o interacción con electrones fuertemente ligados [1].

**Calibración del sistema de adquisición.** Dado que la salida digital del analizador multicanal está discretizada en canales (adimensionales), es preciso calibrar el sistema para adjudicar una energía a cada canal. Para ello se utilizó que en la interacción fotoeléctrica el electrón toma toda la energía del fotón gamma y luego la deposita en el centellador. Por lo tanto, la relación de proporcionalidad dada al final de la descripción del dispositivo experimental indica que el canal en el que se ubica el fotopico debe ser proporcional a la energía del fotón gamma. Para ello, cada fotopico fue ajustado por

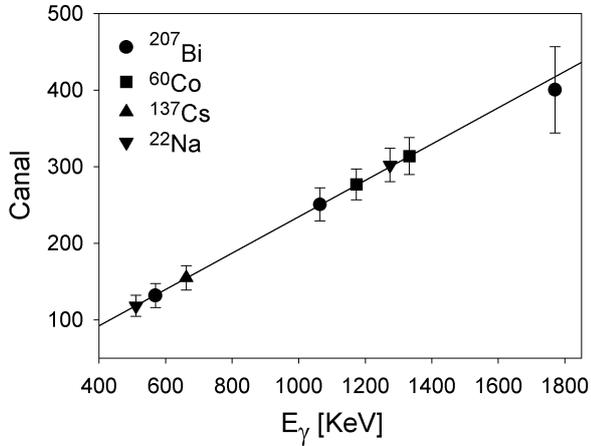


Figura 4: Calibración del detector utilizando radiación gamma de fuentes conocidas. El ajuste por regresión lineal de cuadrados mínimos indicó:  $\text{canal} = (0,237 \pm 0,003) \frac{1}{\text{KeV}} E + (-2,5 \pm 2,5)$ , con un coeficiente de correlación  $r = 0,9996$

una curva gaussiana, y el valor de canal se calculó según:  $\text{canal}_{(E_\gamma)} = x_0 \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N-1}}$ , donde  $x_0$  es la posición del centro de la gaussiana,  $\sigma$  es la dispersión de la curva y  $N$  es el número de canales que abarca la curva experimental. Para cada fotopico, el valor de la correspondiente energía se tomó el valor tabulado[2]. En este estudio se utilizaron como fuentes de rayos gamma los isótopos  $^{207}\text{Bi}$ ,  $^{22}\text{Na}$ ,  $^{60}\text{Co}$ ,  $^{137}\text{Cs}$ . En la figura 4 se puede observar la recta de calibración obtenida. La dependencia de la energía con el canal resultó:

$$E = ((4,22 \pm 0,05) \times \text{canal} + (-10 \pm 11))\text{KeV} \quad (7)$$

**Medición del borde Compton ( $T_{\text{max}}$ ).** Dado que los espectros obtenidos no presentan un borde agudo, sino un ascenso redondeado y una caída con pendiente suave la determinación del borde se realizó siguiendo el procedimiento descrito por Jolivet y Rouze [3]. El borde Compton se encuentra en el histograma a una altura (cantidad de eventos):  $y_c = 0,54(y_m - y_f) + y_f$ , donde  $y_f$  indica la altura (número de eventos) del fondo Compton (donde termina la pendiente y empieza el continuo) e  $y_m$  la altura máxima de la meseta. El error de este procedimiento es:  $\delta y_c = y_m - y_f$ . Luego se vio el valor de abscisa correspondiente a cada altura ( $y_c$ ,  $y_c + \delta y_c, y_c - \delta y_c$ ); en todos los casos el error en la determinación de la abscisa fue menor a 4KeV. En general, entonces, el mayor aporte al error de  $T_{\text{max}}$  provino de la propagación de errores sobre la calibración del sistema de adquisición.

### 3. Análisis y resultados

La figura 5 muestra los histogramas donde se encuentran las mediciones realizadas. El conteo de eventos de emisión de todos los isótopos duró 600s. Debido a la distinta actividad radiactiva de cada muestra, los gráficos originales presentan varios ordenes de magnitud de diferencia en el conteo de fotones. Por ello, los gráficos se estandarizaron normalizando las cuentas respecto del mayor fotopico. En general la cantidad de fotopicos, la proximidad y la amplitud relativa de cada uno de ellos depende de la sustancia observada. Por ejemplo: el  $^{137}\text{Cs}$  tiene un sólo pico. Por otro lado,  $^{22}\text{Na}$  y el  $^{60}\text{Co}$  tienen dos, pero los del  $^{60}\text{Co}$  tienen una proximidad tal que la precisión del detector de NaI(Tl) no logra resolver la meseta Compton del segundo pico. Finalmente en los espectros de  $^{137}\text{Cs}$  y de  $^{207}\text{Bi}$  (primer pico) se detecta un pico de *back-scattering*.

A partir de estos espectros se midieron las energía de los fotopicos ( $E_\gamma$ ) y de los bordes Compton ( $T_{\text{max}}$ ). Como se anticipó anteriormente, éstas dos son las magnitudes medibles a partir de los espectros (ver figura 5) y son las variables que permiten evaluar la validez de los modelos newtoniano y relativista. La figura 6 muestra los valores de la masa en reposo ( $m_0$ ) y la masa inercial no-relativista ( $m_{nr}$ ) del electrón calculadas por las ecuaciones (5) y (6) respectivamente en función de  $T_{\text{max}}$ . El ajuste lineal por regresión de cuadrados mínimos indica que experimentalmente se obtiene:  $m_0 c^2 = (531 \pm 37) + (-0,056 \pm 0,044)T_{\text{max}}\text{KeV}$  y  $m_{nr} c^2 = (531 \pm 38) + (0,445 \pm 0,044)T_{\text{max}}\text{KeV}$ . Por un lado, estos resultados sugieren que la masa en reposo del electrón (dentro de la incerteza) permanece constante para el rango de energías analizadas. Por el contrario, la masa inercial del electrón en el modelo no-relativista no permanece constante. Sin embargo, la extrapolación del ajuste lineal para ambos conjuntos de datos se intersectan para el valor de  $T_{\text{max}} = 0$ , sugiriendo la coincidencia de los modelos en dicho límite. Por otro lado, el ajuste experimental sugiere fuertemente la siguiente relación teórica:

$$m_{nr} c^2 = m_0 c^2 + \frac{T_{\text{max}}}{2} \quad (8)$$

Curiosamente, reemplazando esta relación en el miembro izquierdo de la ecuación (5) y reordenando se obtiene la ecuación (6), indicando la validez del modelo relativista. En este contexto, aceptando la constancia de la masa en reposo del electrón el valor del mismo obtenido como el promedio de los valores graficados en la figura 6 se obtuvo:  $(490 \pm 36)\text{KeV}$ , en concordancia con el valor aceptado en la literatura (511KeV).

Por otro lado, de las ecuaciones (5) y (6) es posible despejar una relación de  $T_{\text{max}}$  en función de  $E_\gamma$  y de

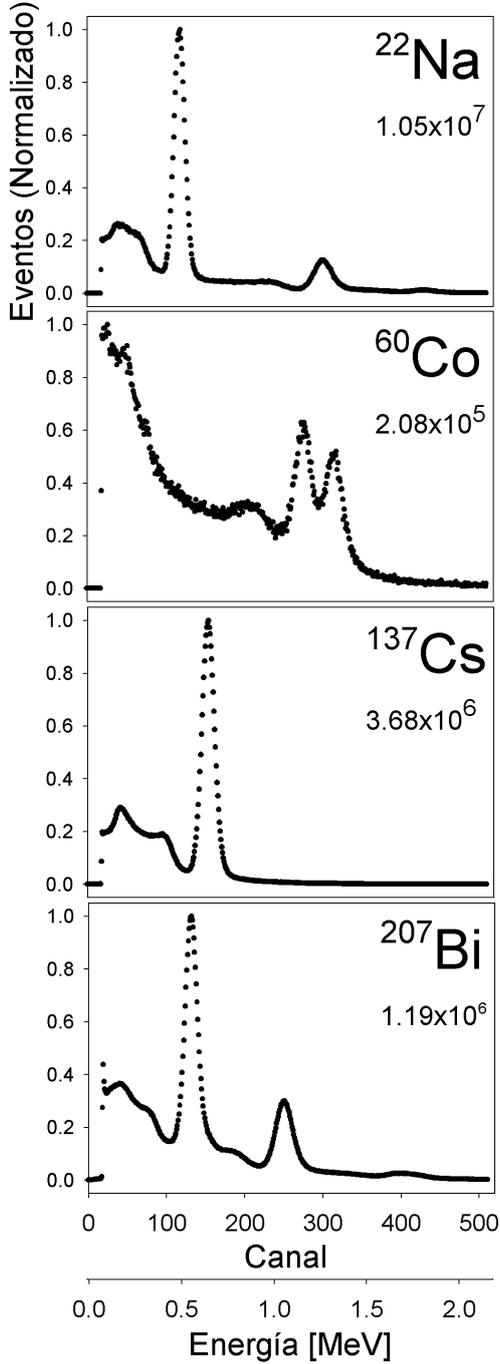


Figura 5: Histogramas normalizados de las mediciones realizadas. La fuente radiactiva está indicada en cada gráfico. Debajo se agrega el número total de eventos (cuentas) registrados durante los 600s de adquisición.

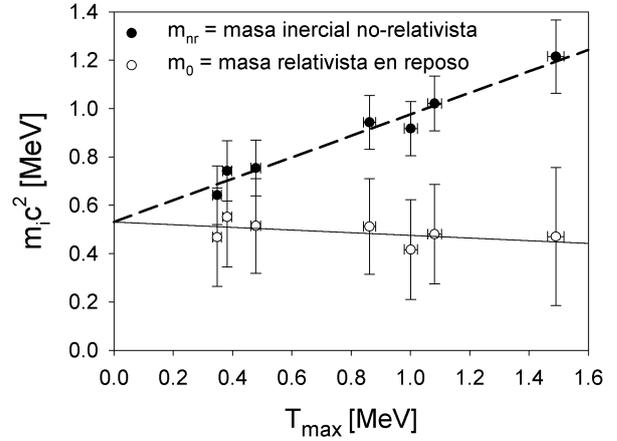


Figura 6: Masa del electrón en función de su energía cinética máxima en un choque Compton. Las líneas rectas indican ajustes lineales por cuadrados mínimos sobre los valores experimentales

$m_{nr}$ , obteniéndose la siguiente expresión clásica:

$$T = 2E_\gamma + m_{nr}c^2 \pm \sqrt{m_{nr}c^2(m_{nr}c^2 - 4E_\gamma)} \quad (9)$$

y la siguiente expresión relativista:

$$T = \frac{2E_\gamma^2}{m_0c^2 + 2E_\gamma} \quad (10)$$

Estas ecuaciones están representadas en la figura 7. Para esta figura se tomó el valor promedio de la masa en reposo y también el valor promedio de la masa inercial no-relativista ( $m_{nr} = (891 \pm 121)\text{KeV}$ ). Se tomaron los promedios debido a que según cada paradigma (relativista y newtoniano) ambas deben ser constantes. En este caso, el mejor ajuste de los datos experimentales corresponde a la curva relativista, reforzando la validez de dicho enfoque.

## 4. Conclusiones

Del análisis de los resultados resulta clara la necesidad de la teoría de la relatividad especial para explicar de manera satisfactoria los hechos experimentales. En particular, la figura 6 muestra que la teoría newtoniana es incorrecta en el rango de altas energías, dado que la masa inercial del electrón aumenta linealmente con la energía cinética a diferencia de los principios de la mecánica clásica. En el caso de bajas energías, el valor de  $m_{nr}$  coincide con  $m_0$  (ver la intersección de los ajustes lineales en la figura 6). En conjunto estos resultados, indican que el modelo clásico es sólo válido en un rango

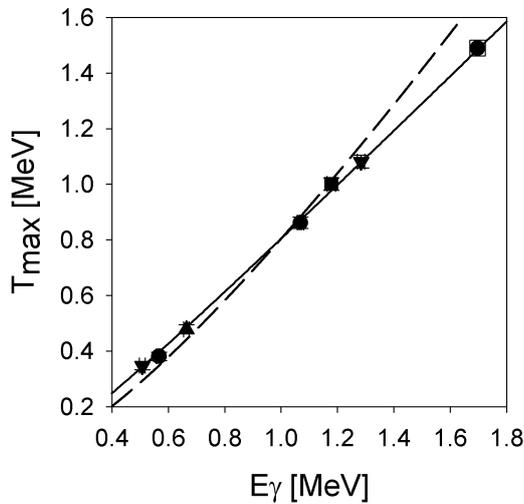


Figura 7: Energía máxima del electrón en un choque Compton vs. la energía del fotón incidente. Las líneas corresponden a las fórmulas de  $T_{max}$  en función de  $E_\gamma$  para el caso relativista (ecuación (10), línea continua) y el caso no-relativista (ecuación (9), línea punteada).

acotado de energías. Por otro lado, los resultados obtenidos concuerdan con los valores de la masa en reposo del electrón obtenidos por experimentos más precisos. Esto indica que dentro de las incertezas experimentales, los procedimientos aplicados (ajuste del fotopico por una curva gaussiana para el cálculo de  $E_\gamma$  y determinación del borde Compton al 54% de la pendiente) son correctos. Con este dispositivo fue posible entonces determinar  $m_0c^2 = (490 \pm 36)\text{KeV}$  con una precisión del 7.3%.

## Referencias

- [1] Tsoulfanidis N, *Measurement and detection of radiation*, Hemisphere Publishing Corp., McGraw-Hill series in nuclear engineering, pp.353-397.
- [2] Lederer CM et al., *Table of Isotopes*, 6th ed., John Wiley & Sons, 1967.
- [3] Jolivette PL, Rouze N (1994). *Compton scattering, the electron mass, and relativity: a laboratory experiment*, Am.J.Phys. 62:266  
Introducción y Arreglo Experimental están basadas en forma general en la siguiente fuente:
- [4] Salvador Gil y E. Rodríguez, *Física Recreativa*, Dinámica relativista - Colisiones de fotones y electrones - Efecto Compton, ed. Prentice Hall, Bs.As., 2001.