

Efecto Compton

Bazterra, Victor (Te.:433-1627) y Camjayi, Alberto (Te.:292-7350)
Laboratorio 5 - Dpto. de Física - FCEyN-UBA - 1997

Resumen: Analizamos los espectros de rayos gama de varias fuentes radiactivas utilizando un centellador sólido de NaI(Tl). Con los datos recogidos, y utilizando solo principios generales de conservación, se impuso ante los resultados experimentales, la necesidad de un tratamiento relativista del problema. Como resultado del análisis medimos la masa en reposo del electrón, así como las relaciones entre su momento lineal y energía con los parámetros γ y β . Para la ubicación de los bordes Compton manejamos dos criterios, uno despojado de hipótesis acerca del instrumento de medición, y otro en el cual incluimos un modelo simple de su funcionamiento. Éste último, si bien aumento los errores experimentales, produjo resultados en completo acuerdo con mediciones mas precisas.

Introducción

Utilizando un detector del tipo centellador inorgánico, obtuvimos varios espectros de rayos gama para distintas fuentes. Estos detectores se construyen con un material absorbente (en este caso Ioduro de Sodio dopado con Talio) que, en forma general, se conocen como centelladores; los mismos aprovechan las distintas interacciones que suceden entre los rayos gama y los electrones dentro del material, obteniendo como producto final una cierta cantidad de fotones visibles que son contados por celdas fotomultiplicadoras.

Las posible interacciones fotón - electrón son:

1. **Efecto fotoeléctrico:** *en este caso, los fotones incidentes son totalmente absorbidos por los electrones que están ligados a los núcleos atómicos del material, siendo éstos electrones expulsados a grandes velocidades a través de éste. Los electrones portan la energía del rayo gama absorbido menos la energía característica de sus ligaduras con el núcleos, que son del orden de unos cuantos cientos de electronvolt. Pero considerando que los rayos gama portan una energía de unas centenas a miles de kiloelectronvolts, podemos despreciar la energía de ligadura y decir que el electrón lleva en realidad toda la energía del fotón incidente.*
2. **Efecto Compton:** *este efecto es consecuencia de una colisión entre el fotón gama incidente y un electrón que se encuentre libre en el material. Este electrón porta una energía que depende del ángulo con que fue dispersado finalmente el fotón.*
3. **Creación de pares electrón - positrón:** *el proceso ocurre en el campo de un núcleo del material absorbente y corresponde a la creación de un par electrón - positrón a expensas de un fotón gama incidente que desaparece en el mismo punto. Esto sucede cuando la energía del gama es mayor a, por lo menos, dos veces la masa del electrón y tiene como consecuencia nuevamente que un electrón se mueva a través del material. El positrón, se aniquila muy rápidamente con otro electrón produciendo nuevamente un fotón gama de casi la misma energía que el incidente.*

Todos estos procesos tiene como punto en común que liberan electrones muy energéticos a través del material, éstos serán frenados transfiriendo la energía que transportaban al medio circundante. Los átomos del material absorbente quedan excitados y cuando decaen producen un número de fotones proporcional a la energía del electrón. Por lo tanto, midiendo dichos fotones, nosotros podemos conocer en forma indirecta la energía del fotón incidente cuando éste es absorbido totalmente por efecto fotoeléctrico, así como observar las características cinemáticas de los electrones que son dispersados por efecto Compton.

El espectro esperado según las anteriores consideraciones puede verse esquemáticamente en la Fig. 1.

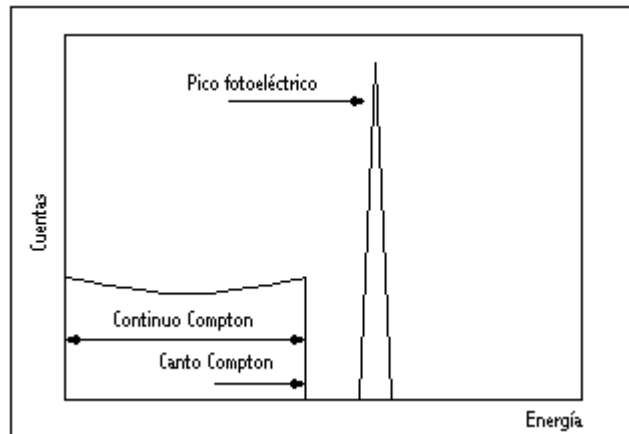


Figura 1: espectro esperado para un detector del tipo centellador.

Teniendo en cuenta que la energía que medimos es en realidad la de los electrones, observamos que hay algunos muy energéticos que forman el pico predominante en la Fig. 1 (“Fotopico”), estos son los que absorbieron totalmente la energía del fotón incidente por efecto fotoeléctrico. También encontramos una variación continua en el espectro de energía (“Continuo Compton”) debido a los distintos ángulos posibles de dispersión en las colisiones entre electrones y fotones. Como vemos, estos electrones tienen un máximo de energía que corresponde a los fotones que chocan y salen hacia atrás, formando un ángulo de 180 grados con la línea de colisión. En esta región está el llamado “Canto Compton”, y su posición nos indica la máxima energía que puede ser transferida a los electrones por efecto Compton.

Por lo tanto, utilizando este espectro, podemos conocer la energía del fotón incidente y la energía que los electrones adquieren al ser dispersados por estos, pudiéndose averiguar el comportamiento cinemático de los mismos.

Postulando los principios de conservación del momento y energía, podemos encontrar las siguientes relaciones:

$$\text{Relaciones por conservación} \begin{cases} p_{\gamma} = p - p'_{\gamma} \\ p_{\gamma}c = p'_{\gamma}c + T \end{cases} \quad (1)$$

donde p_γ , $p_{\gamma'}$ y p son los momentos lineales del fotón incidente, del dispersado y del electrón, y T la energía cinética de este último. Éstas relaciones se suponen correctas tanto en la mecánica clásica como en la teoría de la relatividad. Lo único en que difieren una de la otra, es en la expresión para la energía cinética, que clásicamente es :

$$T = \frac{p^2}{2m_{nr}} \quad (2)$$

mientras en relatividad T esta relacionada con el momento por la expresión :

$$p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2 = (T + m_0 c^2)^2 = E_{total}^2 \quad (3)$$

con $m_0 c^2$ la masa en reposo.

Para saber que formalismo se debe utilizar tenemos que ver cual explica correctamente los datos observados. Veremos en el desarrollo de nuestro trabajo, que los datos se ajustan a los resultados que provienen de la teoría de la relatividad (ver apéndice).

Analicemos ahora algunos detalles del detector, como vimos este tiene un material que cumple la doble función de interactuar con los fotones incidentes, y de frenar los electrones producto de estas interacciones. Como resultado residual del frenado, el material emite un número de fotones visibles. En la siguiente figura tenemos el esquema del detector :

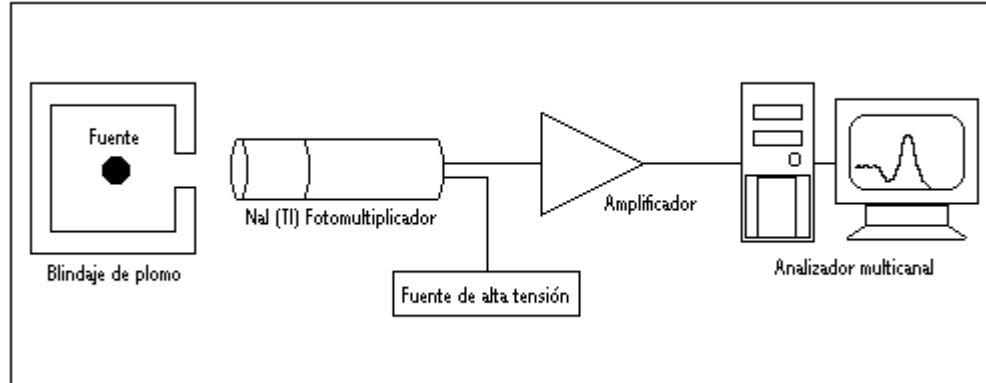


Figura 2: Esquema del dispositivo experimental.

El material utilizado como centellador es Ioduro de Sodio dopado con Talio. Como vemos, después del material centellador, se coloca un fotomultiplicador que cuenta cuanto fotones son emitidos por el material. Luego se pasa la señal por un amplificador, que tiene la propiedad de generar una señal de forma conocida y de duración ajustable, para ser introducida al analizador multicanal. La amplitud de la señal entregada por el amplificador, es proporcional a la cantidad de fotones que incidieron dentro de un intervalo de tiempo también ajustable. El analizador multicanal realiza la tarea de dividir la amplitud de la señal en distintos canales, es decir asocia para cada canal una amplitud determinada de señal y cuenta cuantas veces tuvo la misma esa amplitud asociada. Esto es equivalente a contar cuantos electrones y con que energía fueron emitidos por el material centellador.

Por ultimo, existe el problema de la determinación de canto Compton en un espectro real. Diferentes circunstancias hacen que el canto no sea abrupto, sino suave. En primer lugar muchas veces sucede que en vez de existir un solo efecto Compton, se suceden varios para un mismo fotón gama incidente, produciendo un llenado de la zona entre el pico y el continuo Compton. Otro fenómeno de importancia es que las colisiones no se realizan con electrones libres, sino ligados a los núcleos del material. Esto hace que el quiebre del continuo, es decir el comienzo del canto, se desplace hacia atrás en energía en los espectros reales.

Desarrollo Experimental

Como se indico en la Introducción obtuvimos, utilizando el dispositivo mostrado en la Fig. 2 los espectros de rayos gama de varios elementos, a saber: ^{22}Na , ^{60}Co , ^{133}Ba , ^{137}Cs y ^{207}Bi .

Una vez conseguidos los espectros comenzamos con la obtención de las magnitudes típicas del fenómeno: el fotopico y el canto Compton. La localización de los primeros no ofrece dudas y se realizó ajustando una curva Gaussiana a los mismos.

Para la determinación de los canto Compton, en cambio, nos encontramos con dificultades debido a que, como puede observarse en cualquier espectro real (en la Fig. 3 se muestra el de ^{207}Bi), la pendiente del canto Compton es suave y no abrupta. En primera instancia es tentadora la idea de localizarlo en el punto de quiebre del continuo a la pendiente, pero ésto es incorrecto dado que, la existencia de la ligadura con el núcleo hace que dicho quiebre se encuentre desplazado a la izquierda del canto Compton. Necesitamos pues establecer algún criterio de ubicación. Ésto se debe fundamentalmente a nuestro desconocimiento del funcionamiento concreto del detector y de la corrección introducida al considerar ligado al electrón. Sin éstos conocimientos no podemos contar con un modelo realista del experimento del cuál se desprenda un criterio único de ubicación.

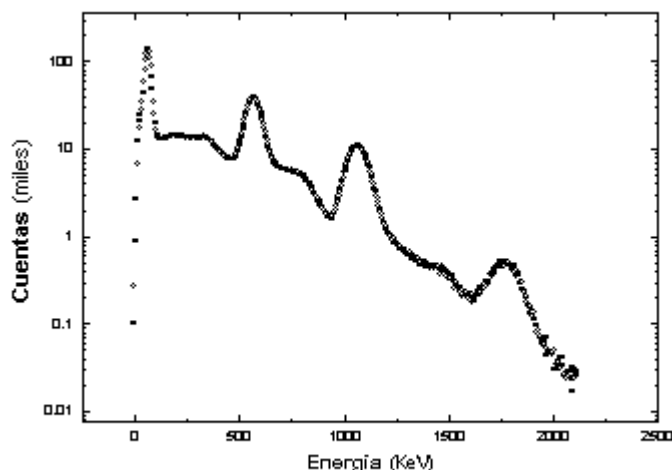


Figura 3: espectro de energía del ^{133}Ba .

El primer criterio que utilizamos fue el de tomar como localización del canto la posición del centroide de una curva sigmoidea (función de Boltzman) que ajustase a los datos.

Criterio del Centroide

Aceptando este criterio estamos suponiendo que el canto se encuentra aproximadamente el centro de la pendiente.

Para empezar realizamos una calibración lineal directa del espectro con los picos del ^{207}Bi . Elegimos este elemento debido a que posee tres picos con un espaciado, en sus valores de energía, conveniente a nuestros fines. Una vez calibrados los espectros, obtuvimos los valores de interés volcados en la Tabla 1.

Resultado Calibración directa (KeV)				Elemento
Fotopico	Error	Borde Compton	Error	
356.2	7.3	184.9	9.0	^{133}Ba
506.9	7.5	328.3	9.7	
1271	11	1045	14	^{207}Bi
568.0	7.6	385	8	
1066.5	9.6	847	10	
1769	13	1518	16	^{135}Cs
675.8	8.0	481.6	7.7	
1193	11	981	14	^{60}Co
1353	12	s/dato	s/dato	

Tabla 1: datos experimentales utilizando el criterio del centroide y calibración lineal directa.

Además realizamos una segunda calibración lineal sujeta a la restricción de que el canal cero correspondiera a energía cero (en la calibración anterior se tienen valores de energía negativos); designaremos a esta calibración como “forzada” en contraposición a la primera que llamamos “directa”. Los resultados se muestran en la Tabla 2.

Resultado Calibración forzada (KeV)				Elemento
Fotopico	Error	Borde Compton	Error	
360.23	1.00	190.4	3.2	^{133}Ba
509.58	0.66	332.6	3.4	
1267.1	1.8	1042.7	5.8	^{207}Bi
570.08	0.58	388.6	1.2	
1064.0	1.0	846.5	2.1	
1760.0	2.3	1511.3	5.5	^{135}Cs
676.93	0.67	484.5	1.0	
1189.6	1.7	979.0	6.0	^{60}Co
1348.3	2.1	s/dato	s/dato	

Tabla 2: datos experimentales utilizando el criterio del centroide y calibración lineal forzada.

Supongamos por ahora que la visión clásica del problema de difusión que tratamos es la correcta para describirlo. Puede deducirse usando (1) y (2) que la energía del electrón en términos de los datos experimentales es (ver Apéndice):

$$m_{nr}c^2 = \frac{p^2c^2}{2T} = \frac{(2E_\gamma - T)^2}{2T} \quad (4)$$

con m_{nr} masa del electrón (tratado de manera clásica), E_γ energía del fotón incidente (fotopico) y T energía cinética del electrón Compton (producto de la difusión a 180° , borde Compton).

Si graficamos esta magnitud en función de T (Fig. 4) lo primero que salta a la vista es que no es constante.

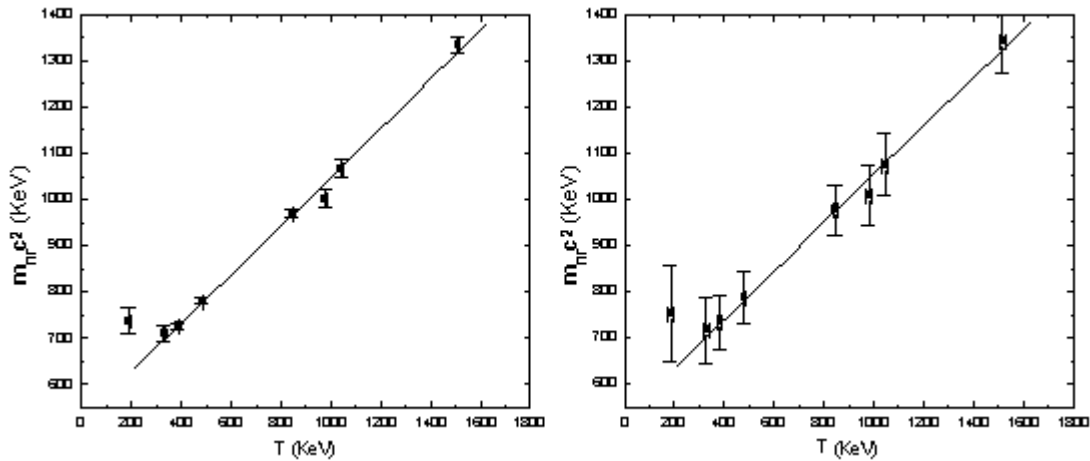


Figura 4: gráficos de la energía del electrón en función de su energía cinética, para ambas calibraciones (forzada a la izquierda, directa a la derecha). Es notable el hecho de que la masa es función de T . La línea continua es un ajuste lineal.

Por consiguiente el tratamiento clásico del experimento no es satisfactorio. Haciendo un ajuste lineal pesado por las incertezas de los datos logramos los siguientes resultados:

- *Calibración forzada:* $m_0c^2 = (532 \pm 16)\text{KeV}$ (ordenada al origen).
Pendiente = (0.515 ± 0.024)
- *Calibración directa:* $m_0c^2 = (555 \pm 26)\text{KeV}$
Pendiente = (0.498 ± 0.031)

Resulta entonces evidente, dentro del error experimental, que $m_{nr}c^2 = m_0c^2 + T/2$. Reemplazando esta expresión en el miembro izquierdo de (4) y completando cuadrados nos reencontramos con la ec. (3), o sea se hace evidente que el enfoque sobre el experimento debe ser relativista.

Una vez asumida esta necesidad, podemos partiendo de la ec. (3) obtener una expresión para m_0c^2 en término de las magnitudes medidas:

$$m_0c^2 = \frac{2E_\gamma(E_\gamma - T)}{T} \quad (5)$$

En la Figura 5 se grafican los valores de m_0c^2 en función de T, y en la Fig. 6 los de T vs. E_γ . En la primera la línea continua es un promedio ponderado de los valores de m_0c^2 , y en la segunda un ajuste de

$$T = 2E_\gamma^2 / (2E_\gamma + m_0c^2) \quad (5')$$

(despejada de ec. (5)).

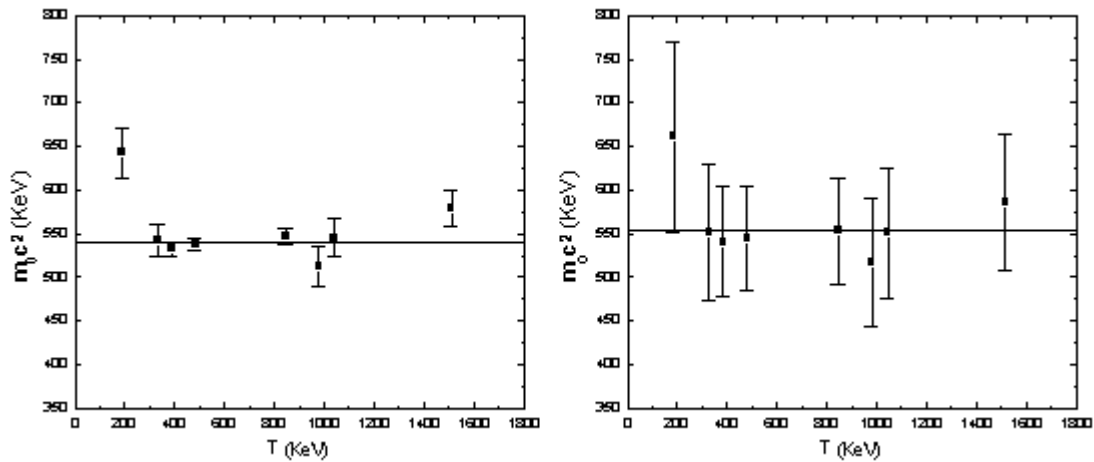


Figura 5: gráficos de m_0c^2 en función de T para ambas calibraciones(forzada a la izquierda, directa a la derecha). La línea continua corresponde a un promedio ponderado de los valores de m_0c^2 : (540.8 ± 3.9) KeV para la forzada y (554 ± 25) KeV para la directa.

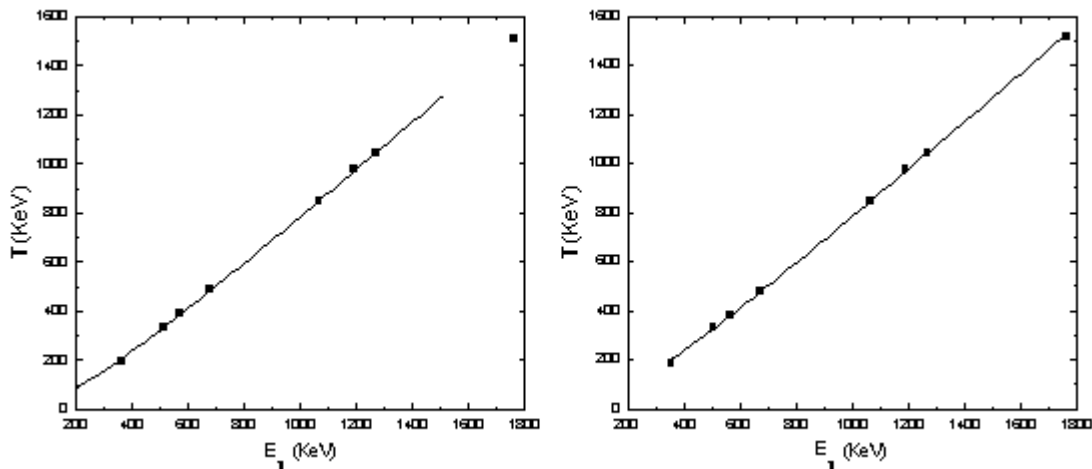


Figura 6: gráficos de T vs. E_γ para ambas calibraciones(forzada a la izquierda, directa a la derecha). La línea continua corresponde al ajuste de (5'). Los valores de m_0c^2 obtenidos fueron (540.6 ± 6.0) KeV para la forzada y (555 ± 11) KeV para la directa.

Los resultados obtenidos fueron:

- *Calibración forzada:* $m_0c^2 = (540.8 \pm 3.9)$ KeV (Promedio Ponderado).
 $m_0c^2 = (540.6 \pm 6)$ KeV (Ajuste de (5')).

- *Calibración directa:* $m_0c^2 = (554 \pm 25)\text{KeV}$ (Promedio Ponderado).
 $m_0c^2 = (555 \pm 11)\text{KeV}$ (Ajuste de (5')).

Es posible extraer aún mayor información de los datos experimentales. En efecto el parámetro relativista $\beta = v/c$ es, en función de los datos experimentales:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{T(2E_\gamma - T)}{T^2 - 2E_\gamma T + 2E_\gamma^2} \quad (6)$$

Por otra parte, de (4): $pc = 2E_\gamma - T$ (7)

Y, por último, el factor γ puede ser calculado de:

$$\gamma = \frac{E}{m_0c^2} = \frac{T^2 - 2E_\gamma T + 2E_\gamma^2}{m_0c^2 T} \quad (8)$$

el valor de m_0c^2 utilizado en (8) es un promedio de los obtenidos en los pasos anteriores. Si bien esta última relación puede ser calculada directamente con los datos de E_γ y T usando la ec. (5), éste proceder nos llevaría a un resultado equívoco dado que la relación $\gamma = 1/(1-\beta^2)^{1/2}$ esta implícita en (5).

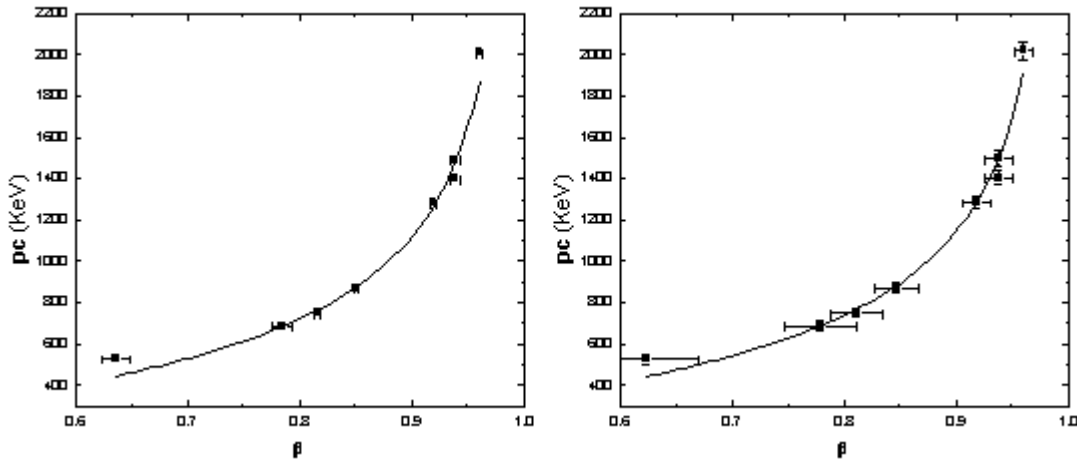


Figura 7: gráficos del momento del electrón como función de β para ambas calibraciones (forzada a izquierda, directa a derecha). La línea continua corresponde a $pc = \gamma\beta m_0c^2$, con $m_0c^2 = (542.4 \pm 7.1)\text{KeV}$ para la forzada y $(554 \pm 11)\text{KeV}$ para la directa.

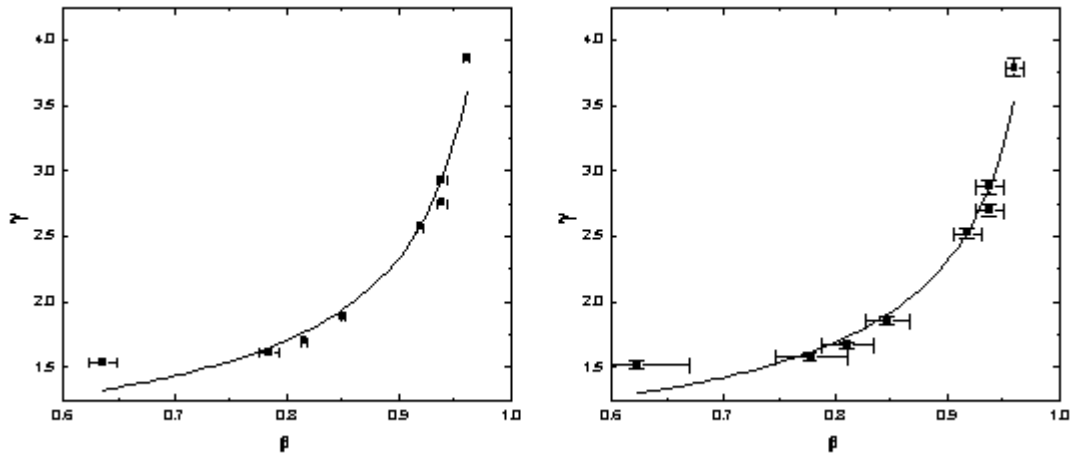


Figura 8: gráficos de γ vs. β para ambas calibraciones (forzada a izquierda, directa a derecha). La línea continua corresponde a $\gamma = 1/(a-b\beta^2)^{1/2}$ y los valores ajustados son, para la forzada $a = (0.950 \pm 0.084)$, $b = (-0.946 \pm 0.095)$; para la directa $a = (0.963 \pm 0.089)$ y $b = (-0.96 \pm 0.10)$.

Para ambos casos, momento en función de β y γ en función de β , el comportamiento de las variables se ajusta a lo predicho por la relatividad especial (comportamiento asintótico cuando β tiende a 1).

Con el objeto de obtener una mayor concordancia entre los valores hallados para la masa en reposo del electrón, ensayamos otro criterio de localización del borde Compton. El criterio de la centroide se basó en la idea de que el mismo se encontraba en el medio de la pendiente a la derecha del continuo. Para modelar de una manera mas directa la respuesta de nuestro detector, tomamos como localización del borde a la fracción, tomada desde la base de la sigmoidea, medida en el espectro de calibración (^{207}Bi). Mas explícitamente, ubicamos los tres bordes Compton en el espectro del ^{207}Bi , medimos a que fracción de la altura de la sigmoidea se hallaban, y promediamos las tres fracciones obtenidas para tener un criterio único. El caso del criterio de la centroide correspondería, entonces, al de una fracción igual a un medio; o sea, a la mitad de la altura.

Una vez determinada la fracción esta se considera fija, y se la utiliza para hallar los bordes Compton de todos los elementos, incluso los del ^{207}Bi . Nuevamente, al igual que en el caso anterior, se utilizaron las dos calibraciones (“directa” y “forzada”).

Criterio de la fracción

Con este criterio volvimos a calcular los datos de interés, para ambas calibraciones. En las Tablas 3 y 4 se encuentran los resultados.

Resultado Calibración directa (KeV)				Elemento
Fotopico	Error	Borde Compton	Error	
356.2	7.3	193	16	^{133}Ba
506.9	7.5	342	19	^{22}Na
1271	11	1062	26	

568.0	7.6	396	14	²⁰⁷ Bi
1066.5	9.6	864	20	
1769	13	1536	28	
675.8	8.0	493	14	¹³⁵ Cs
1193	11	1000	28	⁶⁰ Co
1353	12	s/dato	s/dato	

Tabla 3: datos para calibración directa utilizando el criterio de la fracción.

Resultado Calibración forzada (KeV)				Elemento
Fotopico	Error	Borde Compton	Error	
360.2	1.0	199	12	¹³³ Ba
509.58	0.66	346	17	²² Na
1267.1	1.8	1059	22	
570.08	0.58	399	10	²⁰⁷ Bi
1064.0	1.0	863	16	
1760.0	2.3	1529	22	
676.93	0.67	496	11	¹³⁵ Cs
1189.6	1.7	998	25	⁶⁰ Co
1348.3	2.1	s/dato	s/dato	

Tabla 3: datos para calibración directa utilizando el criterio de la fracción.

Como hicimos en el caso anterior, graficamos la energía total del electrón en función de su energía cinética para ambas calibraciones. Haciendo un ajuste lineal pesado por las incertezas de los datos logramos los siguientes resultados:

- *Calibración forzada:* $m_0c^2 = (492 \pm 22)\text{KeV}$ (ordenada al origen).
Pendiente = (0.507 ± 0.028)
- *Calibración directa:* $m_0c^2 = (503 \pm 26)\text{KeV}$
Pendiente = (0.501 ± 0.030)

Nuevamente resulta necesario adoptar el punto de vista relativista.

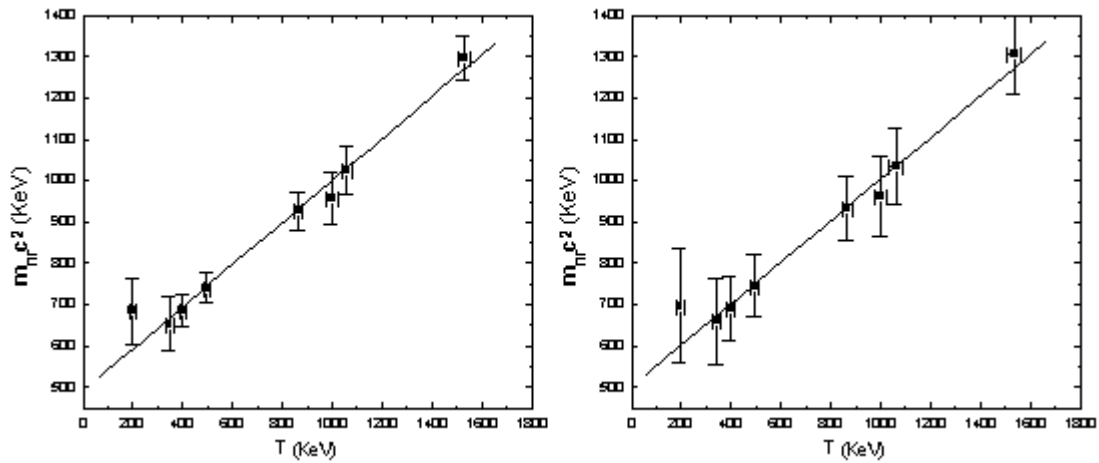


Figura 9: gráficos de la energía del electrón en función de su energía cinética, para ambas calibraciones(forzada a la izquierda, directa a la derecha). Los valores ajustados son $m_0c^2 = (492 \pm 22)\text{KeV}$ y pendiente (0.507 ± 0.028) para la forzada, y $m_0c^2 = (503 \pm 26)\text{KeV}$ y pendiente (0.501 ± 0.030) para la directa.

Estos resultados nos llevan entonces a la ecuación (5) y a graficar m_0c^2 en función de T, y T vs. E_γ . Los resultados obtenidos fueron:

- *Calibración forzada:* $m_0c^2 = (498 \pm 20)\text{KeV}$ (Promedio Ponderado).
 $m_0c^2 = (500 \pm 11)\text{KeV}$ (Ajuste de (5')).
- *Calibración directa:* $m_0c^2 = (504 \pm 35)\text{KeV}$ (Promedio Ponderado).
 $m_0c^2 = (506 \pm 11)\text{KeV}$ (Ajuste de (5')).

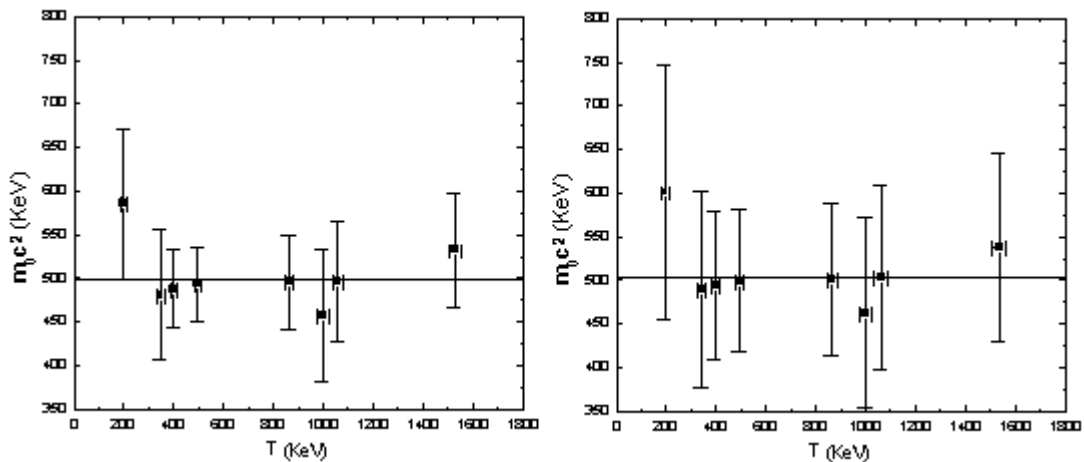


Figura 10: gráficos de m_0c^2 en función de T para ambas calibraciones(forzada a la izquierda, directa a la derecha). La línea continua corresponde a un promedio ponderado de los valores de m_0c^2 : $(498 \pm 20)\text{KeV}$ para la forzada y $(504 \pm 35)\text{KeV}$ para la directa.

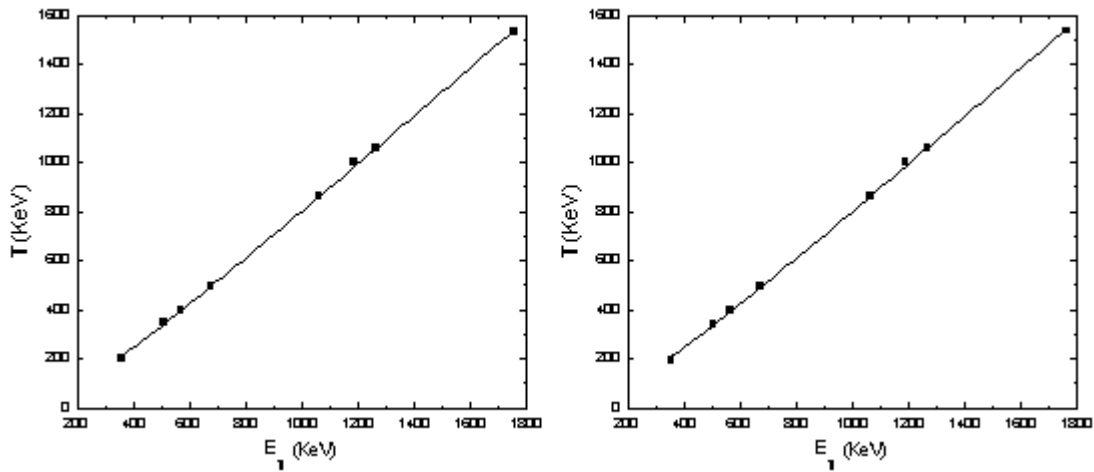


Figura 11: gráficos de T vs. E_γ para ambas calibraciones (forzada a la izquierda, directa a la derecha). La línea continua corresponde al ajuste de (5°) . Los valores de m_0c^2 obtenidos fueron $(500 \pm 11)\text{KeV}$ para la forzada y $(506 \pm 11)\text{KeV}$ para la directa.

Por último, utilizando las expresiones (6), (7) y (8) graficamos pc vs. β y γ vs. β . Igual que en el caso anterior, el comportamiento esta, dentro de los errores experimentales, en completo acuerdo con la relatividad especial.

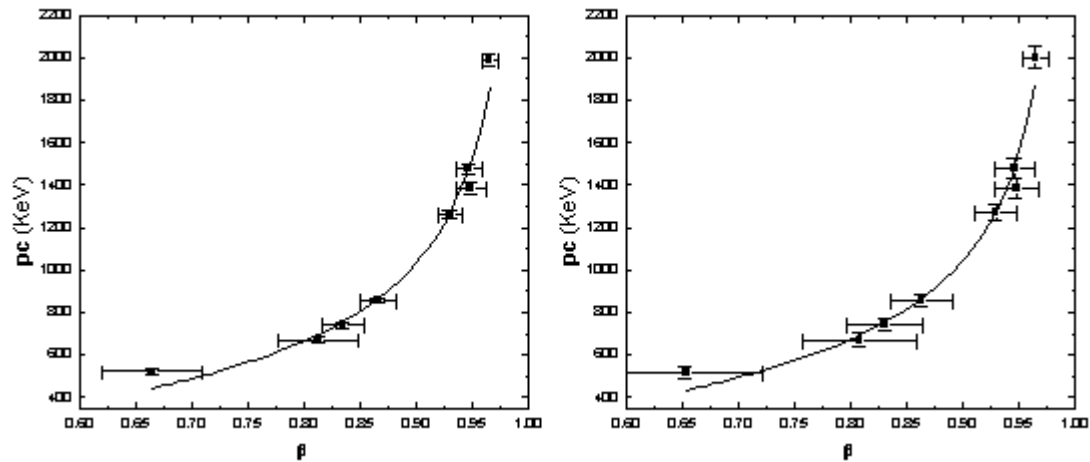


Figura 12: gráficos del momento del electrón como función de β para ambas calibraciones (forzada a izquierda, directa a derecha). La línea continua corresponde a $pc = \gamma\beta m_0c^2$, con $m_0c^2 = (498.6 \pm 9.8)\text{KeV}$ para la forzada y $(504 \pm 11)\text{KeV}$ para la directa.

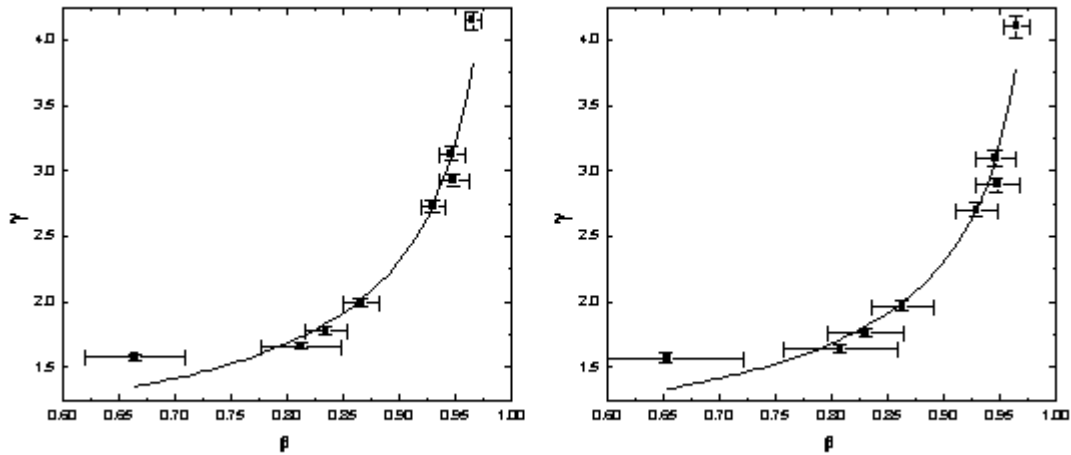


Figura 13: gráficos de γ vs. β para ambas calibraciones (forzada a izquierda, directa a derecha). La línea continua corresponde a $\gamma = 1/(a-b\beta^2)^{1/2}$ y los valores ajustados son, para la forzada $a = (0.978 \pm 0.094)$, $b = (-0.97 \pm 0.10)$; para la directa $a = (0.976 \pm 0.097)$ y $b = (-0.97 \pm 0.11)$.

Conclusión

Del análisis de datos resulta evidente la necesidad de la teoría de Relatividad Especial para explicar de manera satisfactoria los hechos experimentales. Es sumamente ilustrativo que tal necesidad se imponga por sí sola, sin más que utilizar principios generales para encarar el problema.

Con respecto a la localización del borde Compton, la introducción de un modelo simple de respuesta del instrumento, produce resultados que concuerdan, en todos los casos, con el valor aceptado de la masa en reposo del electrón, dentro de las incertezas experimentales.