

# ESTADÍSTICA DEL DECAIMIENTO RADIACTIVO

**Víctor Bazterra (5411-4433-1627) y Alberto Camjayi (5411-4292-7350)**  
*Laboratorio 5, Dto. Física, FCEN, UBA -1997.*

*Utilizando un analizador multicanal se estudió la naturaleza del decaimiento radiactivo de dos fuentes:  $^{22}\text{Na}$  y  $^{135}\text{Cs}$ . Del análisis de datos, realizado con el método  $\chi^2$ , resultó ser la distribución de Poisson el modelo mas apropiado para describir el fenómeno. También se puso en evidencia la igualdad entre el valor medio y la varianza, característica típica de la distribución en cuestión.*

## I. INTRODUCCIÓN

El decaimiento radiactivo, a nivel individual, es un proceso estocástico. Sin embargo, para un ensamble de átomos, por ejemplo, puede determinarse el número de decaimientos promedio por unidad de tiempo y área, y con la aplicación de métodos estadísticos, la llamada función de distribución, que nos da la probabilidad de obtener un número  $n$  de sucesos.

Con la idea de hallar tal función se analizó el decaimiento radiactivo de dos fuentes: una de  $^{22}\text{Na}$  y otra de  $^{135}\text{Cs}$ . Los datos recolectados, junto con consideraciones teóricas, sugirieron la posibilidad de que la función buscada es la conocida como Distribución de Poisson. El método de  $\chi^2$  sirvió como criterio para corroborar tal suposición.

## II. EXPERIMENTO

El experimento se llevo a cabo utilizando un centellador inorgánico ( NaI(Tl) ), que junto con un fotomultiplicador, conformaban el detector. Éste recogía los rayos gama emitidos por las fuentes radiactivas (  $^{22}\text{Na}$  y  $^{135}\text{Cs}$  ) y enviaba una señal que, después de ser amplificada, pasaba a un discriminador (SCA: single channel analyzer). Éste tiene la propiedad de generar una señal de forma conocida y de duración ajustable, para ser introducida al analizador multicanal.

El analizador multicanal, operando en el modo escalado multicanal (MCS: multichannel scaling), dividía el tiempo total de medición en un número determinado de intervalos iguales, llamados canales. En cada uno de ellos contaba la cantidad de sucesos y los registraba. Con una computadora personal se recogieron los datos.

En la figura 1 puede verse un esquema del dispositivo experimental.

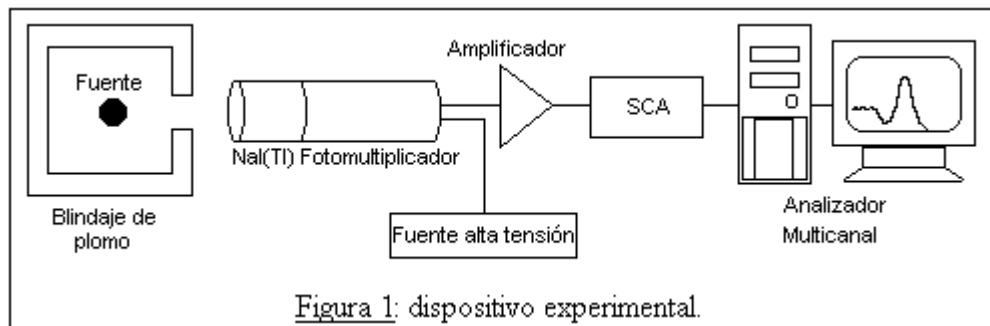


Figura 1: dispositivo experimental.

### III. DESARROLLO

Con el analizador en 1024 canales se realizaron mediciones con ambas fuentes, para intervalos de 1, 2, 4, 8, 10, 20, 40, 80, 100, 200, 400, 800 y 1000 ms. En el modo 512 canales se trabajó con un intervalo de 2 s.

Los datos recogidos por la computadora personal eran volcados en gráficos, del tipo mostrado en la figura 2, por el programa del analizador multicanal.



**Figura 2:** espectro típico recogido por el analizador multicanal.

A la hora de aplicar algún modelo estadístico se tuvieron en cuenta las siguientes consideraciones teóricas:

1. Todos los átomos son idénticos: o sea es razonable suponer que los átomos de cada muestra que participan en la desintegración son del mismo elemento (la pureza de la muestra es lo suficientemente elevada, considerar que las impurezas deberían ser radiactivas para ser relevantes).
2. Todos los átomos son independientes: la emisión de un fotón gama por parte de un átomo no condiciona la probabilidad de emisión de otro átomo de la muestra.
3. La probabilidad de desintegración en un intervalo de tiempo del orden de los de medición es constante: esto significa solamente que la vida media

de las fuentes es mucho mayor que dos segundos, que fue el tiempo de medición mas largo que se implementó. Esta hipótesis se cumple plenamente.

4. El número de átomos y de intervalos es lo suficientemente grande como para que el tratamiento estadístico tenga sentido.

Estas hipótesis pueden ser asimiladas a las requeridas por la distribución de Poisson<sup>1,2</sup> de la siguiente manera:

Si llamamos **a** a la fracción de partículas que se desintegran por unidad de tiempo, entonces el número promedio de eventos en un intervalo **t** es **at**.

Para un intervalo lo suficientemente pequeño **dt**, el valor **adt** es la probabilidad de observar una sola partícula:

$$P_1(dt) \cong \mathbf{adt}$$

(dado que  $P_1 \gg P_2 \gg P_3 \gg \dots$ ) y la probabilidad de no observar ninguna será:

$$P_0(dt) = 1 - P_1(dt) = 1 - \mathbf{adt}$$

Para un intervalo **t + dt** entonces, la probabilidad de observar **n** partículas es:

$$P_n(t + dt) = P_1(dt)P_{n-1}(t) + P_0(dt)P_n(t) = \mathbf{adt}P_{n-1}(t) + (1 - \mathbf{adt})P_n(t)$$

De donde es fácil deducir que:

$$\frac{dP_n}{dt} = \mathbf{a}\{P_{n-1}(t) - P_n(t)\} \quad (1)$$

La solución de esta ecuación es:

$$P_n(t) = \frac{(\mathbf{a}t)^n}{n!} \mathbf{exp}(-\mathbf{a}t)$$

en la que si tomamos todos los intervalos de medición  $t$  iguales, de modo que  $at = m = \text{cte.}$  lleva a:

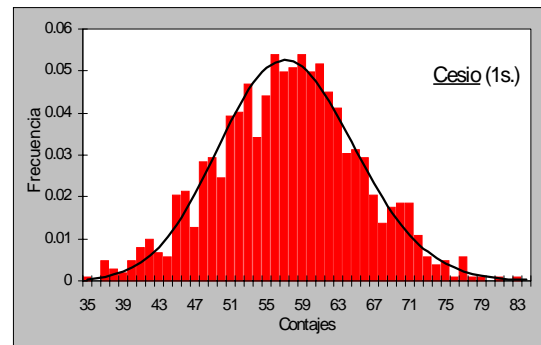
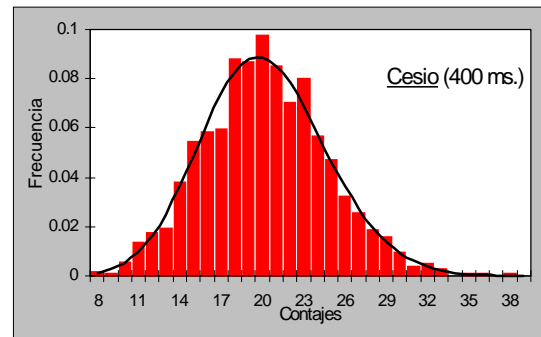
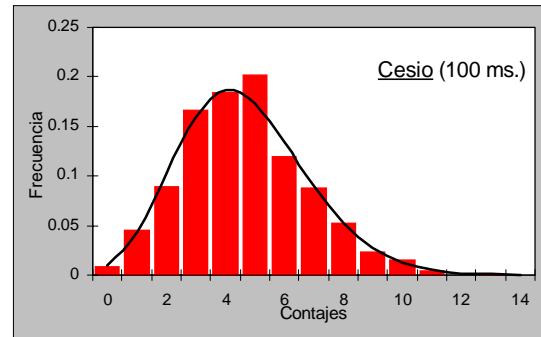
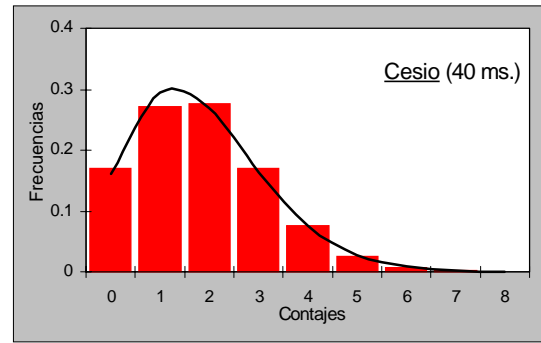
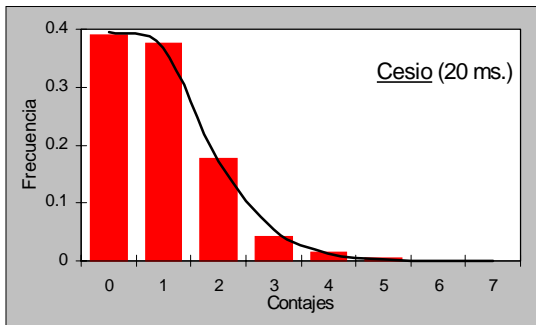
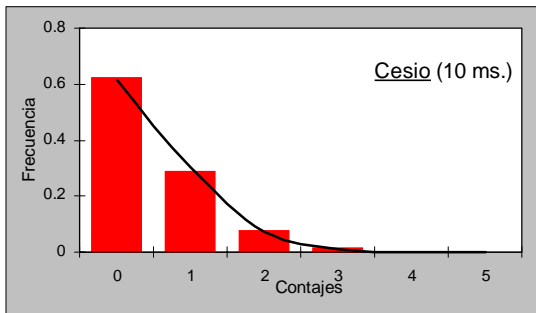
$$P_n = \frac{(m)^n}{n!} \exp(-m) \quad (2)$$

que es la distribución de Poisson.

El parámetro  $m$  de la ec. (2) es el llamado “valor medio” de la muestra, que para colecciones finitas es:

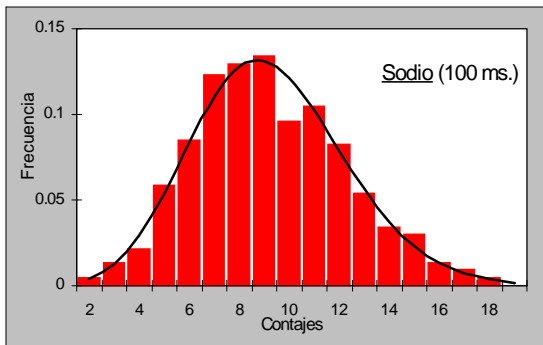
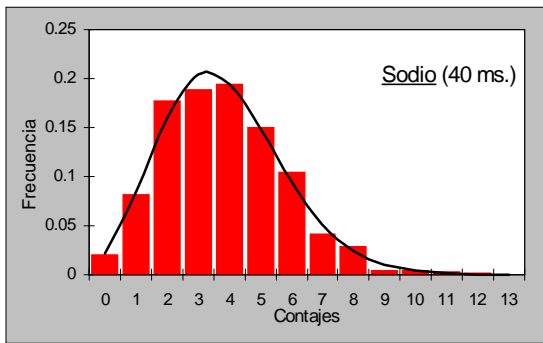
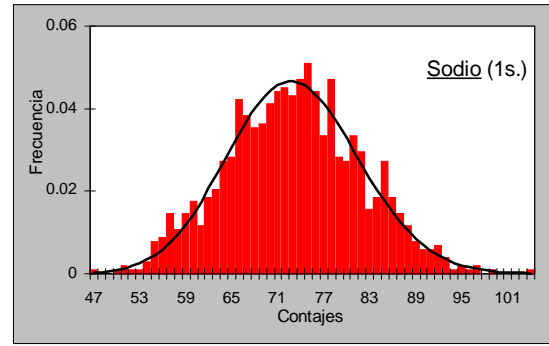
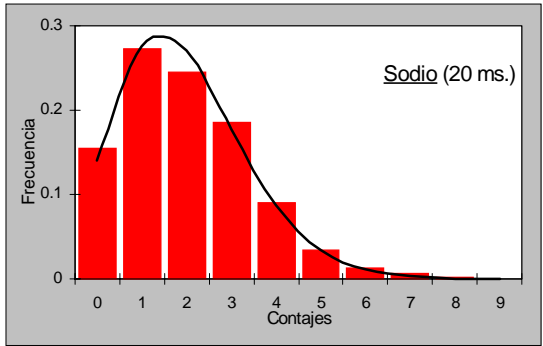
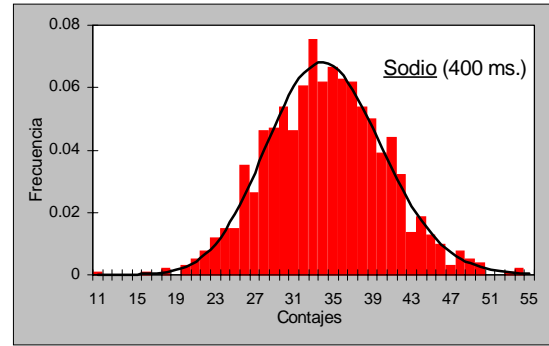
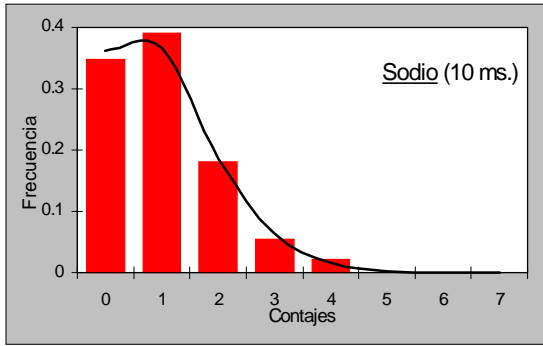
$$m \cong \langle n \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i \quad (3)$$

Una vez propuesto el modelo estadístico, se comenzó el análisis de datos. En las figuras que siguen pueden verse varios histogramas confeccionados por nosotros de los resultados obtenidos, con su correspondiente función de distribución de Poisson. El valor de  $m$  en cada caso fue calculado utilizando la ec. (3).



**Figuras 3 y 4:** histogramas de la frecuencia del número de cuentas para canales de 10 y 20 ms (Fuente de Cesio). Los datos se hallan normalizados. La curva sólida es la correspondiente distribución de Poisson.

**Figuras 5, 6, 7 y 8:** histogramas de la frecuencia del número de cuentas para canales de 40, 100, 400 y 1000 ms (Fuente de Cesio). Los datos se hallan normalizados. La curva sólida es la correspondiente distribución de Poisson.



**Figuras 9, 10, 11 y 12:** histogramas de la frecuencia del número de cuentas para canales de 10, 20, 40 y 100 ms (Fuente de Sodio). Los datos se hallan normalizados. La curva sólida es la correspondiente distribución de Poisson.

**Figuras 13 y 14:** histogramas de la frecuencia del número de cuentas para canales de 400 y 1000 ms (Fuente de Sodio). Los datos se hallan normalizados. La curva sólida es la correspondiente distribución de Poisson.

Resulta notoria la correspondencia entre los histogramas y la distribución de Poisson. Para darle un carácter cuantitativo a esta impresión, se realizó la prueba de  $\chi^2$  con toda la muestra. Esta prueba consiste en el cálculo de la llamada estadística  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i} \quad (4)$$

donde  $n_i$  es la frecuencia medida y  $\hat{n}_i$  la teórica. En este problema en particular  $\hat{n}_i$  corresponde al valor predicho por la distribución de Poisson. Una vez obtenido  $\chi^2$ , se calcula la probabilidad  $P(x > \chi^2)$  de una variable aleatoria continua siguiendo una distribución Chi cuadrado.

Un resultado cercano a 1 (lo que implica un  $\chi^2$  próximo a cero) indica un ajuste adecuado de los datos.

Utilizando la planilla de cálculos Excel 5.0 se realizó la prueba obteniéndose en todos los casos resultados superiores a 0.99998 (el programa maneja una exactitud numérica de seis cifras, y de las 28 muestras tomadas 22 tienen un  $\chi^2 = 1$ ). Otra característica distintiva de la distribución de Poisson, susceptible de ser verificada es que su varianza es igual al valor medio (o sea  $\sigma^2 = m$ ).

La variancia de una muestra se define como:

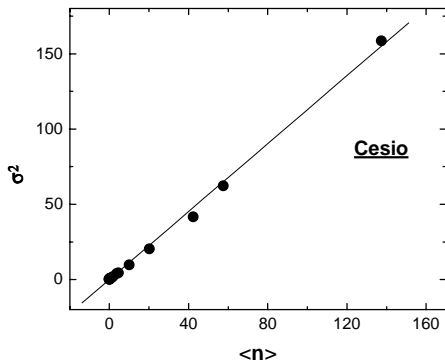
$$\sigma^2 \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n - m)^2 P_n \quad (5)$$

con lo que, reemplazando  $P_n$  por la forma explícita de la distribución se llega al resultado deseado.

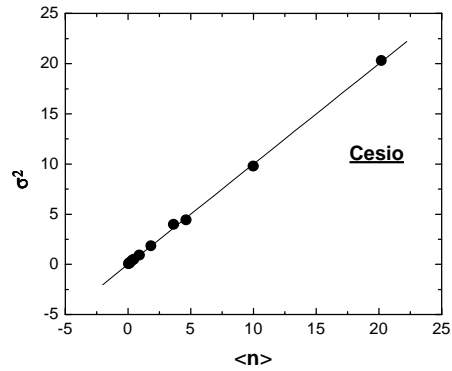
Para muestras finitas la variancia es:

$$\sigma^2 \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (n_i - \langle n \rangle)^2 \quad (6)$$

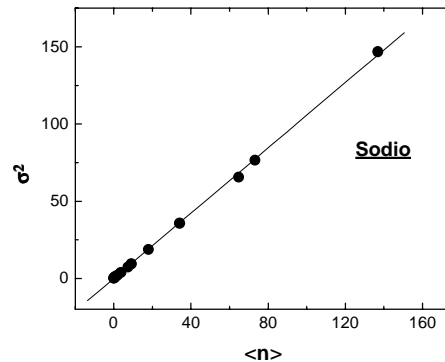
utilizando esta fórmula se calculó la variancia de cada muestra y, a continuación, se graficó  $\sigma^2$  vs.  $\langle n \rangle$ . En las figuras 15 a 18 se muestran los resultados.



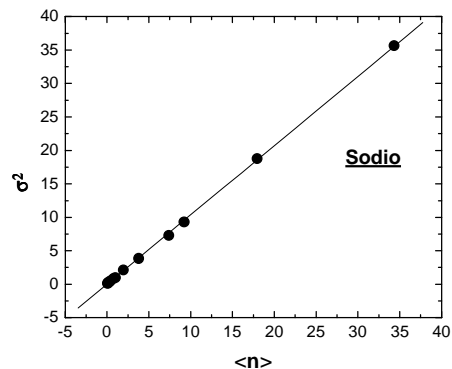
**Figura 15:** ajuste lineal ( $y = ax$ ) de  $\sigma^2$  vs.  $\langle N \rangle$  para el cesio. El valor de  $a$  hallado es  $a = (1.129 \pm 0.015)$ .



**Figura 16:** ajuste lineal ( $y = ax$ ) de  $\sigma^2$  vs.  $\langle N \rangle$  para el cesio, sin los datos correspondientes a 800ms, 1s y 2s. El valor de  $a$  hallado es  $a = (0.9997 \pm 0.0064)$ .



**Figura 17:** ajuste lineal ( $y = ax$ ) de  $\sigma^2$  vs.  $\langle N \rangle$  para el sodio. El valor de  $a$  hallado es  $a = (1.0574 \pm 0.0059)$ .



**Figura 18:** ajuste lineal ( $y = ax$ ) de  $\sigma^2$  vs.  $\langle N \rangle$  para el sodio, sin los datos correspondientes a 800ms, 1s y 2s. El valor de  $a$  hallado es  $a = (1.0352 \pm 0.0041)$ .

En las figuras 16 y 18 se restringió el gráfico a los primeros once datos en busca de un a pendiente mas cercana a uno. Los valores no considerados correspondieron a los intervalos de 800ms, 1s y 2s, dado que en ellos el mayor volumen de datos promueve una mayor inestabilidad en el cálculo numérico.

#### **IV. CONCLUSIÓN**

De los resultados logrados resulta evidente el acuerdo entre la distribución de Poisson y la estadística del fenómeno de decaimiento radiactivo.

La realización de la experiencia favoreció grandemente el conocimiento y manejo de tal modelo, dado que, en todos los trabajos por nosotros realizados hasta la fecha, los fenómenos seguían la estadística Normal o Gaussiana.

De la misma manera, la implementación de la prueba del  $\chi^2$  nos acercó a una técnica sumamente útil y muy utilizada.

#### **V. BIBLIOGRAFÍA**

- 1.- R. D. Evans, "The Atomic Nucleus", McGraw-Hill Book Co. New York 1955.
- 2.- P. R. Bevington, "Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences", McGraw-Hill Book Co. New York 1969.