

Estadística del decaimiento radioactivo

Faraggi Marisa y Sapoznik Marysol

Laboratorio 5- Curso de verano 2001

Resumen:

En el siguiente informe se analiza el comportamiento estadístico de la emisión de una fuente radiactiva de Cs 137. La función distribución planteada para este comportamiento es la de Poisson. Verificamos este hecho utilizando una de las características de la distribución $\sigma^2 = \langle n \rangle$.

Introducción

Para estudiar el comportamiento estadístico del decaimiento radioactivo de una fuente de cesio proponemos la distribución de Poisson siguiendo los datos experimentales obtenidos.

Fundamentos teóricos

Con el fin de obtener una función de distribución definimos la variable aleatoria, denotada por n la cual se considera en el siguiente desarrollo como el número de emisiones de una fuente radiactiva, por lo tanto es discreta y no negativa [1].

La interpretación de la función $P(n,t)$ es la probabilidad de que n emisiones ocurran en un intervalo de tiempo t que comienza en un instante arbitrario. En un intervalo pequeño de tiempo entre t y $t+\Delta t$, n puede incrementarse o permanecer constante, esta característica se expresa de la siguiente forma:

$$P(n,t+\Delta t) = P(n,t) [1 - \gamma(n, \Delta t) + O(\Delta t)] +$$

$$P(n-1,t)[\gamma(n-1,\Delta t)+O(\Delta t)] \quad (1)$$

La probabilidad de una emisión en un intervalo de tiempo Δt se escribe como

$\gamma(n, \Delta t) + O(\Delta t)$, en el caso de la función distribución de Poisson, la probabilidad de una emisión en un Δt de un conjunto de partículas se asume como $\lambda \Delta t + O(\Delta t)$, ya que la transición de probabilidad es independiente de la historia del sistema de partículas. De esta forma sustituyendo en la ecuación 1 se llega a:

$$P(n,t+\Delta t) = P(n,t) [1 - \lambda \Delta t + O(\Delta t)] + P(n-1,t)[\lambda \Delta t + O(\Delta t)] \quad (2)$$

Con el fin de encontrar la forma de la distribución, derivamos la ecuación 2 despreciando los términos de orden superior a Δt cuando este tiende a cero y asumimos que la variable t es continua.

$$\frac{dP(n,t)}{dt} = -\lambda P(n,t) + \lambda P(n-1,t) \quad (3)$$

Para la ecuación anterior se tiene la condición de contorno $P(0,0)=1$, sustituyendo en la misma $n=0$ la ecuación diferencial que se obtiene, tiene como solución $P(0,t)=\exp(-\lambda t)$. Análogamente para $n=1$ la solución es $P(1,t)=\lambda t \exp(-\lambda t)$. Observando la forma de estas soluciones se llega a una solución general como la que sigue:

$$P(n,t) = [\exp(-\lambda t) * (\lambda t)^n] / n! \quad (4)$$

donde $\lambda = \langle n \rangle$.

La expresión 4 es la conocida distribución de Poisson, de la cual sabemos que el

valor medio de los datos experimentales debe coincidir con el valor obtenido de la varianza. En nuestro caso utilizamos como definición de valor medio y varianza a las siguientes expresiones.

$$\langle n \rangle = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N n_i$$

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N (n_i - \langle n \rangle)^2$$

Desarrollo del experimento

Para obtener el número de emisiones que genera una fuente radiactiva, en nuestro caso de Cesio 137, utilizamos un detector del tipo centellador de NaI(Tl). Básicamente el funcionamiento de este detector consiste en transmitir un fotón generado por el rayo γ al interactuar con el centellador, el fotón se convierte a un pulso eléctrico mediante un fotomultiplicador [2]. Este pulso eléctrico se amplifica y se transmite a un programa de PC. MCS (Multi Channel Scaling) con el cual se puede realizar la siguiente adquisición de datos: ejecutando el programa en el modo MCS se obtiene el número de veces que el detector recibe una señal, sin tener conocimiento de la intensidad de la misma. Es posible realizar este conteo en distintos

intervalos de tiempo (dwell time) y cierta cantidad de veces.

Nuestras mediciones fueron repetidas 1024 veces y el intervalo de tiempo fue desde 400 μ s a 800ms.

El dispositivo experimental utilizado es el que se esquematiza en la figura 1.

Resultados y Análisis

Con el fin de realizar una estadística de la emisión de la fuente de Cs 137 fue necesario tomar una importante cantidad de datos, por lo tanto las adquisiciones que realizamos para cada dwell time fueron 1024, es decir se repitió el experimento 1024 veces para cada dwell time, variando este último tiempo entre 400 μ s y 800ms, utilizamos estos valores ya que son pequeños comparados con la vida media de la fuente, con lo cual el experimento se realiza en condiciones prácticamente inalteradas para la fuente.

Se construyeron histogramas para cada dwell time, a continuación se muestran algunos de los mismos, de forma tal que se puede apreciar el comportamiento poissoniano de la distribución.

Las figuras 2, 3 y 4 corresponden a dwell time de 2, 20 y 200 ms respectivamente.

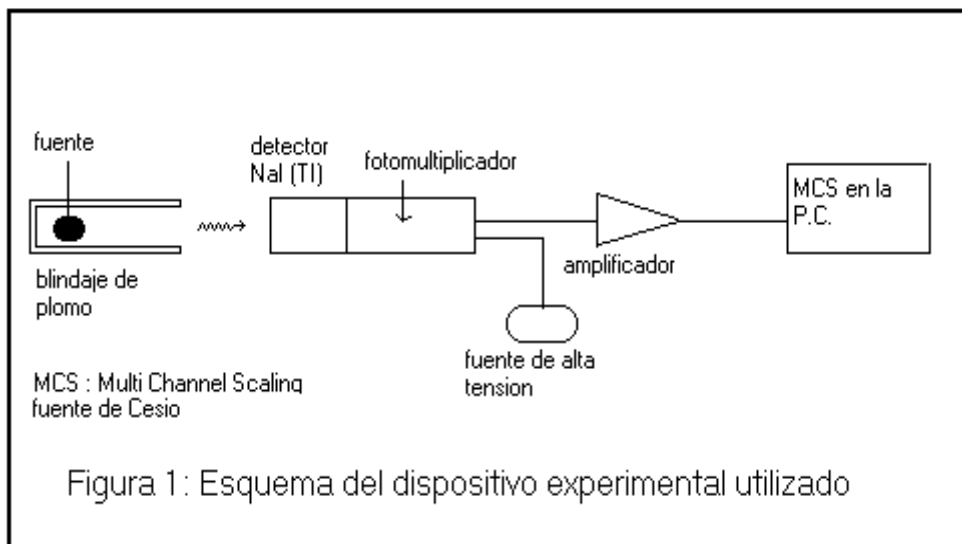


Figura 1: Esquema del dispositivo experimental utilizado

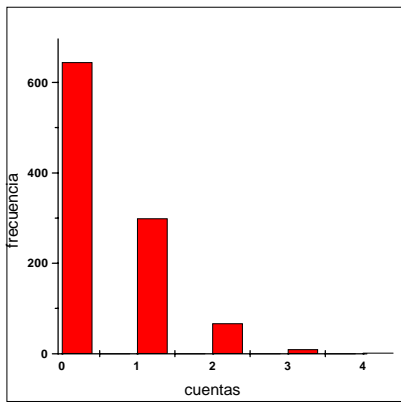


Figura 2: Histograma sin normalizar para un dwell time de 2ms.

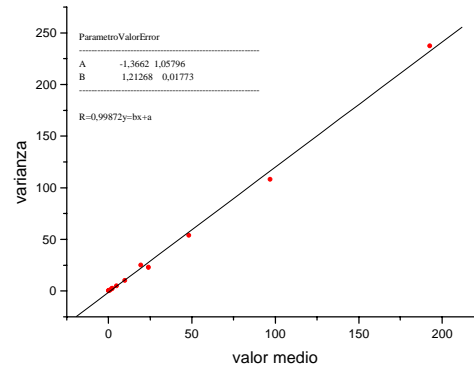


Figura 5: Regresión lineal de la varianza y el valor medio para todos los valores de dwell time considerados.

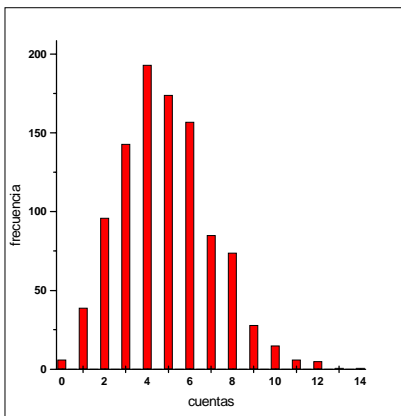


Figura 3: Histograma sin normalizar para un dwell time de 20 ms.

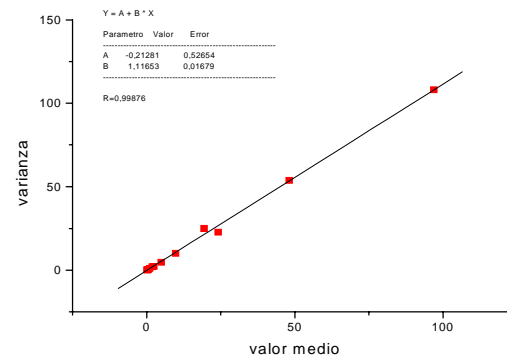


Figura 6: Regresión lineal excluyendo el dwell time de 800ms

$$Y = B * X + A$$

	A	B
Fig 5	-1.35±1.06	1.21±0.01
Fig 6	-0.21±0.52	1.11±0.01
Fig 7	0.06±0.36	1.12±0.01

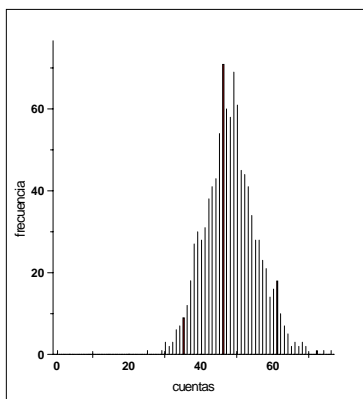


Figura 4: Histograma no normalizado para un dwell time de 200ms.

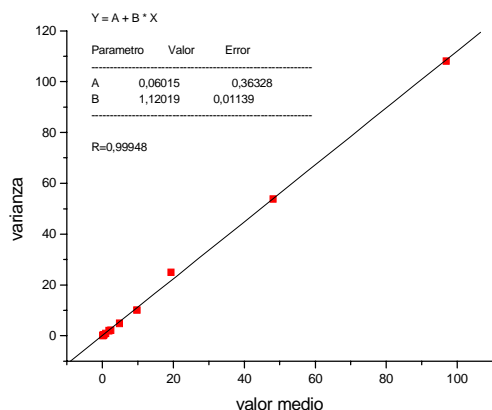


Figura 7: Regresión lineal excluyendo los tiempos 80ms y 800ms

Considerando que la distribución que ajuste a los datos experimentales sea una poissoniana, el gráfico de la varianza en función del valor medio debería ser de la forma $y = x$, es decir que la ordenada al origen es cero y la pendiente cercana a 1. En la figura 5 observamos que estos valores se encuentran alejados de los que esperábamos obtener, por lo tanto interpretando que algunos puntos podrían ser excluidos realizamos las figuras 6 y 7 en las cuales los resultados se acercan considerablemente a los que predice la teoría.

Los errores para los valores de la pendiente y ordenada al origen fueron

obtenidos por el programa Origin 4.1 que utiliza para esto

Conclusión

Si bien en la literatura [3] se asume que la distribución que mejor ajusta a la emisión de una fuente de rayos gamma es la de Poisson, nuestros resultados experimentales se acercan a tal afirmación, pero con cierta manipulación en los resultados, es decir la exclusión de puntos en la regresión lineal de las figuras 6 y 7.

Referencias

[1] Am. J. Phys. 48 (2), Feb.1980
Stochastic models of radioactive decay

[2] Sitio en la web http://www.canberra.com/literature/basic_principles/gamma.htm

[3] Harald Cramer , Elementos de la teoría de probabilidades, edición española Aguilar S.A. Cáp. 6 y 7