

Medición de la constante de Boltzmann

Jorge M. Gianfelice y Julián A. Lell
jorgegianfelice@arnet.com.ar y peugeotd4a@yahoo.com

Laboratorio 5, Departamento de Física, Universidad de Buenos Aires, Curso de verano de 2005

Titular de la cátedra: Dr. Salvador Gil y JTP: Lic. Miguel Monteverde

Resumen. La constante de Boltzmann (k) expresa la relación entre la energía media de una partícula y su temperatura absoluta. Se utiliza en las ecuaciones que describen las propiedades de los gases, así como también en la teoría de Plank sobre la radiación de cuerpo negro. En este trabajo se determinará la relación e/k utilizando un transistor, y la carga del electrón (e) requerida para determinar k se medirá mediante un proceso de electrólisis.

1.1 Introducción

El presente trabajo está basado en el artículo titulado “Un simple experimento de laboratorio para medir e/k ”, escrito por Fred Inman¹. Este autor utilizó un modelo simplificado de la conducción eléctrica en transistores mediante electrones y huecosⁱ, con el fin de medir la relación entre la carga eléctrica del electrón (e) y la constante de Boltzmann (k). En su artículo propone la utilización de multímetros digitales para medir pequeñas tensiones y corrientes en un circuito simple, cuyo principal componente es un transistor de silicio (UTC7805).

En este trabajo se midió la relación e/k , utilizando el procedimiento descrito en el artículo mencionado, y se utilizó también un método alternativo que involucra la adquisición de datos por computadora.

El estudio del comportamiento del transistor a diferentes temperaturas proporcionó una medición confiable de e/k , en la que los errores considerados para la temperatura del transistor no afectaron significativamente a dicha medición.

La constante k se obtiene utilizando un valor medido para e . Se ha elegido un proceso de electrólisis para la medición de e , debido a su simplicidad y alta precisión.

1.2 Medición de e/k

Si se establece una diferencia de potencial entre el emisor (E) y la base (B) de un transistor, se puede medir una corriente de cortocircuito entre el colector (C) y B (ver fig. 1). Esta corriente se origina debido a la difusión de portadores de carga que se hallan en la juntura E-B, hacia la zona en la cual se halla C. La corriente C-B (I_{CB}) en función del potencial E-B (V_{EB}) se expresa en forma aproximada por la ecuación

$$I_{CB} = I_0 \exp(eV_{EB} / kT), \quad (1)$$

ⁱ Se denomina “huevo” al portador de carga positiva presente en un semiconductor, que surge de la liberación espontánea de un electrón por parte de un átomo de la red cristalina del semiconductor. Los huecos se producen también por la presencia de impurezas con tres electrones de valencia en el cristal semiconductor. Desde un punto de vista teórico, los huecos son considerados como partículas con un determinado tamaño y masa en analogía con los electrones (que son los portadores de carga negativa).

desarrollada por Shockley (Ver apéndice), donde T es la temperatura en grados Kelvin de los semiconductores. Tomando el logaritmo natural de la ecuación (1) se obtiene la relación lineal

$$\ln(I_{CB}) = \ln(I_0) + \frac{e}{kT} V_{EB}, \quad (2)$$

que pone en evidencia la linealidad entre V_{EB} y el logaritmo de I_{CB} . De este modo, si se ajusta por cuadrados mínimos el gráfico de $\ln(I_{CB})$ en función de V_{EB} se obtendrá el valor de la pendiente e/kT , que permite conocer la relación e/k buscada sabiendo la temperatura del transistor durante el transcurso del experimento.

Método A

Figura 1. Circuito del dispositivo experimental para la medición de e/k según el método descrito en el artículo de la ref. 1. El transistor utilizado es un UTC7805.

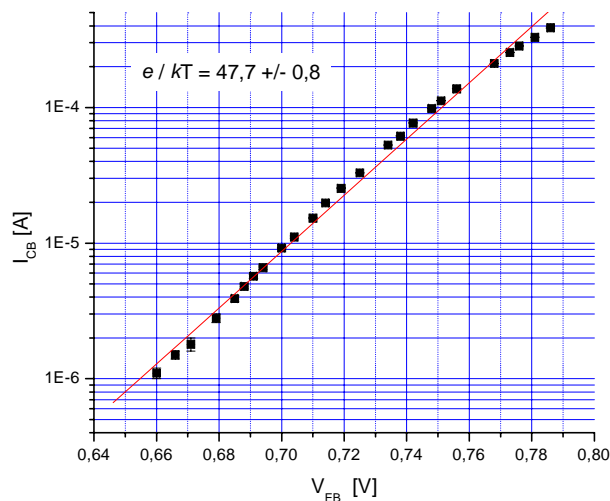


Figura 2. Representación en escala logarítmica de las corrientes medidas para distintas tensiones E-B, y ajuste lineal por el método de cuadrados mínimos. El transistor utilizado fue un UTC7805

En la figura 1 puede verse el circuito que se utilizará para la primera medición de e/k . Se representa con los símbolos (V) y (A) a un voltímetro y a un amperímetro respectivamente. Entre ellos se ubica el transistor, cuyas terminales E, C y B se indican

en la misma figura. Nótese que V_{EB} puede graduarse en forma continua mediante la resistencia variable R_v .

La figura 2 muestra en escala logarítmica los resultados obtenidos al variar manualmente I_{EB} , utilizando la resistencia variable R_v . Para el rango de tensiones utilizado, I_{CB} creció desde $1 \mu\text{A}$ hasta $0,4 \text{ mA}$. Para V_{EB} mayores a $0,76 \text{ V}$, la corriente pierde su tasa de crecimiento exponencial.

Como ya se ha mencionado anteriormente, el modelo físico utilizado requiere que la resistencia entre el colector y la base sea despreciable (ver apéndice). Por lo tanto, la desviación observada para tensiones superiores a $0,76 \text{ V}$ parecerían indicar la limitación del modelo usado, es decir, de la ecuación (1). El segundo factor que puede producir una desviación del comportamiento exponencial es el aumento de la temperatura del transistor debido al paso de la corriente. Pero considerando que la pendiente e/kT utiliza la temperatura en grados Kelvin, un cambio de temperatura de 10 grados (de 25 a 35 grados C) sólo afectaría al valor de la pendiente en menos de $3,5 \%$. Además el transistor utilizado fue montado sobre un disipador térmico de gran masa, que evita aumentos de temperatura ponderables en el encapsulado del transistor, con lo cual los efectos de calentamiento quedan descartados en este procedimiento.

El resultado obtenido aquí es de $(1,42 \pm 0,02) \cdot 10^4$ para e/k , que es aceptable en orden de magnitud, aunque posiblemente el error ha sido subestimado.

Método B

Figura 3. Esquema del dispositivo experimental utilizado para el segundo procedimiento de medición.

El segundo método para determinar la constante e/k requiere del dispositivo experimental esquematizado en la figura 3. V_{EB} se establece en este caso mediante un generador de señales configurado para establecer una diferencia de potencial que varía linealmente con el tiempo (señal triangular), y que oscila entre 0 y $0,25$ volts. I_{CB} circula por un nanoamperímetro Keithley 845, el cual cuenta con una salida analógica que se conecta a la placa de adquisición de la PC, permitiendo la lectura de una tensión proporcional a la corriente que se desea medir. La computadora registra simultáneamente V_{EB} (medida en los terminales Ch A) y una tensión proporcional a I_{CB} (medida sobre los terminales Ch B).

El cálculo de e/k se realizará utilizando un transistor de silicio con disipador puesto que se desea la estabilidad térmica del dispositivo en todo momento. Se realizaron una serie de mediciones a diferente temperatura, en las cuales el transistor fue montado sobre una lámina de aluminio en contacto con nitrógeno líquido.

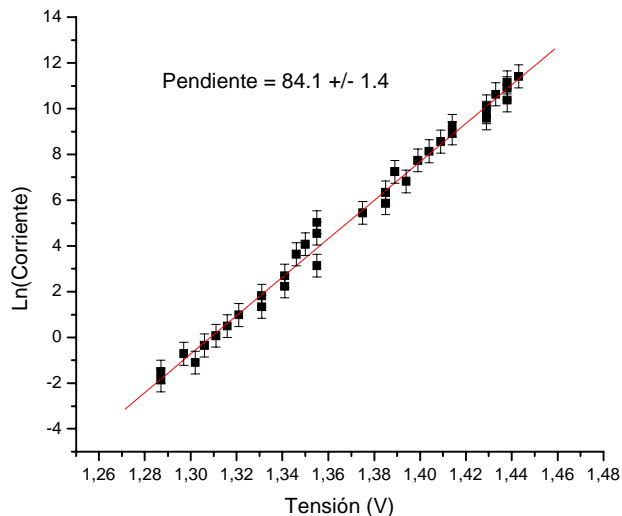


Figura 4. Representación del logaritmo natural de I_{CB} en función de V_{EB} para una temperatura de -135 grados centígrados. La pendiente indica el valor de e/kT .

Para cada temperatura, se verificó el rango de linealidad del logaritmo de la corriente como función de la temperatura, para luego obtener la pendiente de la recta que mejor ajusta a los valores medidos, tal como se muestra en la figura 4.

Se realizaron mediciones para un total de 8 temperaturas distintas (en cada una se realizó un estudio similar al exhibido en la figura 4), con lo cual puede realizarse un gráfico de las pendientes obtenidas por cuadrados mínimos en función de la temperatura.

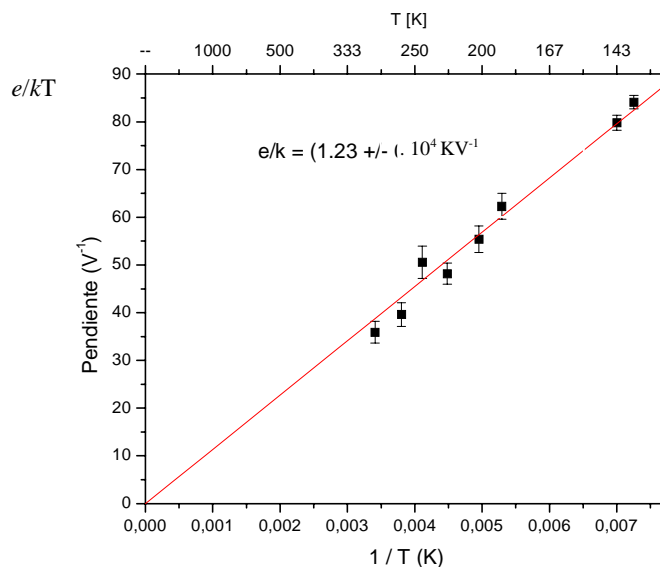


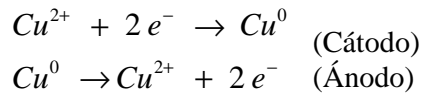
Figura 5. Pendientes de las rectas obtenidas por el método de cuadrados mínimos en función de la recíproca de la temperatura.

La figura 5 muestra un ajuste lineal para los valores mencionados anteriormente, cuya pendiente es e/k . Mediante este método se obtuvo un valor $(1,23 \pm 0,04) \times 10^4 \text{ KV}^{-1}$ para e/k , que es compatible con el aceptado actualmente, de $(1,16045 \pm 0,000002) \times 10^4 \text{ KV}^{-1}$.

1.3 Medición de e

Si se realiza la electrólisis de una solución acuosa de CuSO_4 , en cada interfase electrodo – disolución tiene lugar una reacción electroquímica que transfiere electrones al electrodo, o en su defecto los toma de él. De esta manera se permite que la carga fluya por todo el circuito.

Disponiendo de electrodos de Cu , las reacciones que se producen en cada uno de ellos son:



Según esta reacción, para que se deposite un mol de Cu^0 de la disolución deben fluir dos moles de electrones a través del circuito. Así, la masa total depositada sobre el cátodo está compuesta por iones de cobre que trasladan una carga equivalente a la de dos electrones ($2 e^{-}$) cada uno.

Por otro lado la variación de masa Δm del electrodo viene dada por la diferencia entre la masa del electrodo antes de comenzar la electrólisis (masa inicial) y la masa del electrodo después de la electrólisis, es decir cuando se hayan depositado en él los iones transportados de Cu^{2+} (masa final). Esta variación de masa se puede expresar por medio de la relación:

$$\Delta m = \mu_{\text{ión}} \cdot N \quad (3)$$

Donde $\mu_{\text{ión}}$ en este caso es la masa de cada ión de Cu^{2+} y N es el número total de iones depositados en el cátodo. A su vez $\mu_{\text{ión}}$ se puede escribir en relación con su masa molar (M_{molar}) y el número de Avogadro (N_A) según:

$$\mu_{\text{ión}} = \frac{M_{\text{molar}}}{N_A} \quad (4)$$

Además, se puede expresar la carga transportada (Q) como el producto entre la carga del electrón, el número de iones sedimentados en el cátodo y un factor (ν) que depende de la cantidad de carga producida por la disociación electrolítica, que en este caso es 2. De esta forma tiene lugar la ecuación

$$Q = 2 \cdot e \cdot N \quad (5)$$

Finalmente si se introduce la ecuación (4) en la (3), y ambas en la (5), se llega a la relación

$$e = \frac{M_{\text{molar}}}{2 \Delta m N_A} \cdot Q, \quad (6)$$

de donde se puede observar que la carga del electrón (e^-) queda expresada en función de la carga transportada (Q) y de la variación de masa Δm del cátodo. Esto permite diseñar un experimento para medir la carga eléctrica del electrón, en el que se requiere medir con precisión Q y Δm .

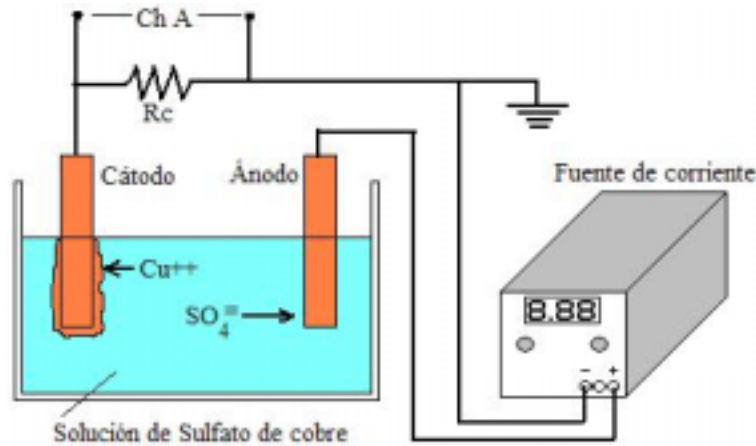


Figura 6: Esquema del dispositivo experimental para realizar electrólisis

Se montó un dispositivo experimental similar al de la figura 6. Esta disposición consta de:

- Una fuente de corriente continua de rango 0 - 30 V.
- Un registro de corriente en función del tiempo con una interfase MPLI^y (Vernier Software) que mide la caída de tensión sobre una resistencia de $100\ \Omega$, conectada en serie con el circuito.
- Una cuba electrolítica con dos electrodos de cobre en la cual se coloca una dilución de CuSO_4 en agua destilada (concentración 1,57 M).

Para obtener Δm se procedió a pesar, con una balanza de 1 mg de precisión los electrodos antes y después de producirse la electrólisis. Conociendo la corriente circulante en función del tiempo, se realizó una integración numérica de acuerdo a la ecuación

$$Q = \int_0^T I dt, \quad (7)$$

con la cual se obtiene la carga total que ha circulado por la solución.

La experiencia que se describió anteriormente se repitió para distintos electrodos y corrientes.

Masa inicial del cátodo [g]	Masa final del cátodo [g]	Variación de masa [g]	Carga transportada [C] Error = +/- 0.2	Carga del electrón [C]
$m_1 = 1.248$	$m_1 = 1.253$	$\Delta m_1 = 0.005$	$Q_1 = 16.8$	$1.56 \pm 0.07 \times 10^{-19}$
$m_2 = 0.989$	$m_2 = 0.999$	$\Delta m_2 = 0.01$	$Q_2 = 29.7$	$1.57 \pm 0.05 \times 10^{-19}$
$m_3 = 0.932$	$m_3 = 0.938$	$\Delta m_3 = 0.006$	$Q_3 = 16.1$	$1.49 \pm 0.07 \times 10^{-19}$
$m_4 = 1.119$	$m_4 = 1.123$	$\Delta m_4 = 0.004$	$Q_4 = 12.9$	$1.70 \pm 0.08 \times 10^{-19}$

Tabla 1. Resultados para los procesos de electrólisis realizados.

La tabla 1 muestra los valores que se utilizaron para la masa de los electrodos, junto con las masas depositadas en cada caso y la carga total transportada durante el experimento.

La carga eléctrica del electrón (e^-) se obtuvo a partir de la ecuación (4), y los valores obtenidos se pueden apreciar en la última columna de la tabla 1.

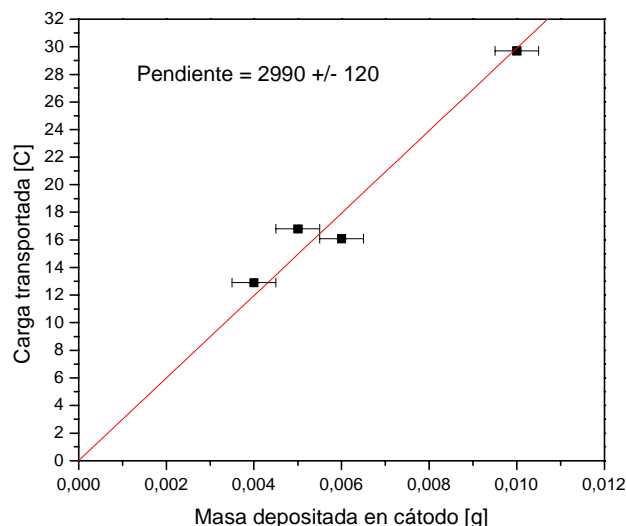


Figura 7. Ajuste lineal para las distintas mediciones realizadas.

La figura 7 muestra el ajuste lineal realizado sobre los valores obtenidos para la carga transportada en función de la masa de cobre depositada en el cátodo. De la pendiente del ajuste puede despejarse el valor de e , que resulta igual a $(1,58 \pm 0,04) \times 10^{-19} \text{ C}$. De esta manera, la constante e fue determinada con error menor al 3%, y el valor aceptado actualmente ($1,602176 \times 10^{-19} \text{ C}$) queda incluido en el margen de error de la medición realizada.

La constante k queda establecida, luego de incorporar la medición de e a la de e/k , con un valor de $(1,28 \pm 0,08) \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, el cual es del orden de magnitud del valor aceptado actualmente ($1,380650 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$).

Conclusiones

Se logró determinar un valor de e/k concordante en orden de magnitud con el valor aceptado actualmente, aunque este valor aceptado se halla fuera del margen de error calculado para la medición realizada. Se concluyó que el calentamiento interno de los transistores con disipador no es lo suficientemente importante como para modificar el resultado de las mediciones.

La carga del electrón pudo ser medida con un error inferior al 3%. Ésta medición podría ser mejorada cambiando ciertos parámetros del experimento, por ejemplo mediante la disminución de la corriente circulante por la cuba electrolítica y el aumento en el tiempo de medición. Puesto que la intensidad eléctrica puede ser medida con mucha precisión, y que la cantidad de masa que se deposita en los electrodos puede elegirse arbitrariamente, la carga del electrón podría determinarse en un laboratorio básico con la precisión que se desee.

	<i>Medición</i>	<i>Valor aceptado internacionalmente</i>
e/k	$(1,23 \pm 0,04) \cdot 10^4 \text{ KV}^{-1}$	$(1,16045 \pm 0,000002) \cdot 10^4 \text{ KV}^{-1}$
e	$(1,58 \pm 0,04) \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$1,602176 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
k	$(1,28 \pm 0,08) \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	$1,380650 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Tabla 2. Resultado final del trabajo realizado.

Apéndice- Justificación de la relación (1) - (Ver referencia 4)

Un parámetro importante en los semiconductores es el número de electrones por unidad de volumen en la banda de conducción n_c y el número de huecos por unidad de volumen en la banda de valencia p_v . Estos valores dependen críticamente de la presencia de impurezas. Cuando el semiconductor es puro, los electrones en la banda de conducción provienen de la banda de valencia. En el caso del semiconductor no degenerado, esto se expresa con la ecuación

$$p_v(T) = n_c(T) \equiv n_i(T),$$

donde n_i se puede escribir como:

$$n_i(T) = B \cdot T^{3/2} \exp\left(-\frac{E_g}{2k_B T}\right)$$

En muchos casos se agregan impurezas, las cuales contribuyen con una densidad de electrones en la banda de conducción o de huecos en la banda de valencia. En este caso hablamos de semiconductor extrínseco, donde:

$$p_v(T) \neq n_c(T)$$

Las impurezas que aportan a la densidad de portadores del semiconductor se denominan donadores si proveen electrones a la banda de conducción y aceptores si proveen huecos a la banda de valencia. Los donadores son átomos que poseen una valencia química mayor que los átomos que conforman el semiconductor puro; mientras que los aceptores son aquellos que poseen una valencia menor.

Una juntura pn es un cristal semiconductor cuyo nivel de impurezas varía en una de las direcciones y sólo en una pequeña región, conteniendo de un lado sólo donadores y del otro

sólo aceptores. A la región con impurezas aceptoras se la denomina tipo p mientras que a la de impurezas dadoras se la denomina n . A esto se lo llama dopaje. La zona donde la densidad de portadores es no uniforme tiene un espesor cuyo valor oscila entre 10^2 y 10^4 Å. Cuando entre los extremos de la juntura se aplica una diferencia de potencial, aparece como resultado una corriente, la cual tiene dos contribuciones: la de los electrones y la de los huecos. A su vez cada una de las mismas puede suponerse conformada por dos corrientes, una generada por la excitación térmica a la que se denominará I_{gen} y otra opuesta, denominada corriente de recombinación I_{rec} , debida al fuerte campo eléctrico formado en la región donde cambia el tipo de impurezas, que permite que los electrones atraviesen la barrera de potencial. Ésta corriente varía según la diferencia de potencial aplicada de acuerdo a:

$$I^{rec} = I_0^{rec} \exp(eV_{EB} / kT)$$

Cuando la diferencia de potencial es nula no debe haber una corriente neta, puesto que de lo contrario se estarían almacenando cargas en los extremos del semiconductor.

Entonces:

$$I_0^{gen} = I_0^{rec}$$

Entonces la corriente total será la producida por los huecos y los electrones como sigue

$$I = I_{ho}^{rec} \cdot \exp\left(\frac{eV}{k_B T}\right) - I_h^{gen} + I_{e0}^{rec} \cdot \exp\left(\frac{eV}{k_B T}\right) - I_e^{gen}$$

$$I = I_0 \cdot \left[\exp\left(\frac{eV}{k_B T}\right) - 1 \right]$$

Las ecuaciones establecidas hasta aquí son válidas también para transistores cuya base y colector se hallan al mismo potencial, lo cual puede lograrse uniendo sus terminales C y B con un conductor de baja resistencia, menor a 0,5 Ohm.

Referencias:

- 1) Fred W. Inman y Carl E. Millar, "The measurement of e/k in the introductory physics laboratory", Am. J. Phys. 41,349 (1973).
- 2) R.B. Adler, A.C. Smith y R.L. Longini, "Introducción a la física de los semiconductores", Ed. Reverté (1974).
- 3) Robert M. Eisberg, "Fundamentos de Física Moderna", Ed. Limosa (2001)
- 4) C. Scannapieco - M. A. Kuroda, "Medición del gap de energía en materiales semiconductores de silicio y germanio". www.fisicarecreativa.com Trabajo práctico para la materia Laboratorio 5 del Departamento de Ciencias Físicas - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires