

Estudio del comportamiento de un material piezoeléctrico en un campo eléctrico alterno.

Eduardo Misael Honoré, Pablo Daniel Mininni
Laboratorio 4- Dpto. de Física -FCEyN- UBA-1996.

Un material piezoeléctrico conectado a un circuito eléctrico se comporta frente a un campo alterno en el entorno de una frecuencia de resonancia en forma similar a un circuito RLC. Para estudiar este comportamiento se utilizó como muestra un cristal de cuarzo conectado a una fuente alterna. Se realizaron diferentes mediciones de tensión para determinar los parámetros característicos de un modelo de circuito equivalente.

Se obtuvo para este circuito un factor de calidad $Q = 11400 \pm 200$, imposible de alcanzar con una combinación de inductancias, capacidades y resistencias ordinarias.

I. INTRODUCCIÓN

Las tensiones mecánicas que aparecen en un dieléctrico isótropo que se encuentra en un campo eléctrico constituyen un efecto que es cuadrático respecto del campo. Este mismo efecto se observa en los cristales. Sin embargo para ciertos tipos de simetrías de la estructura cristalina esta dependencia tiene un carácter esencialmente distinto. Las tensiones internas que aparecen en estos cuerpos son aproximadamente lineales con el campo¹.

Despreciando las contribuciones de orden mayor, tenemos

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{d}} \cdot \underline{E} \quad (1)$$

donde $\underline{\underline{\varepsilon}}$ es el tensor de deformaciones, $\underline{\underline{d}}$ el tensor piezoeléctrico y \underline{E} es el campo eléctrico.

De la misma forma, frente a deformaciones del dieléctrico aparece un campo lineal con las tensiones mecánicas internas

$$\underline{P} = \underline{\underline{d}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad (2)$$

donde \underline{P} es el vector polarización y $\underline{\underline{\sigma}}$ el tensor de tensiones. Este fenómeno es llamado *efecto piezoeléctrico*.

Notar que por la linealidad de las ecuaciones, si se aplica un campo \underline{E} alterno el material oscilará con la misma frecuencia. Además se observa experimentalmente que la amplitud de la vibración se hace máxima cuando la frecuencia del campo eléctrico toma ciertos valores particulares, llamados *frecuencias de resonancia*.

La ecuación de movimiento del cristal vibrando debido a la acción de una fuerza externa dependiente del tiempo es

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad (3)$$

donde m es la masa, b el coeficiente de amortiguamiento y k la constante elástica del material. Esta ecuación es análoga a la del circuito RLC serie

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dV(t)}{dt} \quad (4)$$

donde L es la inductancia, R la resistencia, C la capacidad y V es la fem con que se alimenta el circuito.

La analogía que hay entre las ecuaciones permite representar las características de deformación mecánica del cristal en términos del circuito eléctrico equivalente.

El objetivo de este trabajo es modelar el comportamiento de un cristal piezoeléctrico con las ecuaciones de un circuito RLC sencillo, y verificar la validez de dicho modelo.

II. ARREGLO EXPERIMENTAL

Se utilizó como material piezoeléctrico un monocristal de cuarzo cortado a $+5^\circ$ del eje x en forma de prisma de base cuadrada de 4 mm de lado y 5 mm de longitud. Dos de sus caras laterales opuestas fueron metalizadas y tenían dos alambres soldados. Al aplicar una tensión sobre los alambres, las caras metalizadas actúan como un capacitor C' en paralelo con el cristal (ver figura 1).

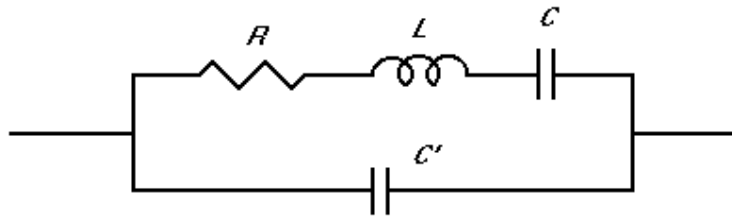


Figura 1

Esto hace que el modelo del circuito cambie ligeramente y aparezca una frecuencia de antirresonancia asociada con la capacidad en paralelo.

Se montó el siguiente circuito (ver figura 2)

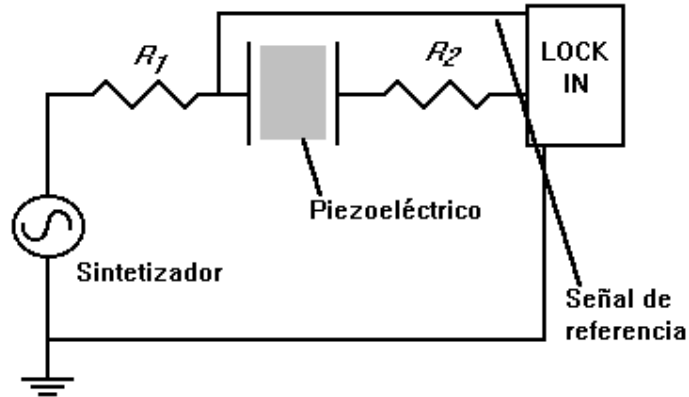


Figura 2. $R_1 = R_2 = 10000 \text{ Ohm}$.

Reemplazando el lock-in por un osciloscopio se determinaron las frecuencias de resonancia (máxima transferencia) y de antirresonancia (mínima transferencia). Teniendo en cuenta estos valores se programó un barrido lineal en frecuencias con el sintetizador de función, desde 50,04 KHz hasta 50,4 KHz, de acuerdo con el siguiente esquema:

Rango A: 50,04 KHz a 50,12 KHz de a 0,08 Hz en 100 segundos

Rango B: 50,09 KHz a 50,12 KHz de a 0,03 Hz en 100 segundos

Rango C: 50,2 KHz a 50,4 KHz de a 0,2 Hz en 100 segundos

El lock-in permite medir la componente de tensión que esta en fase (desde ahora, parte real) y la componente a 90° (parte imaginaria) con respecto a la señal de referencia. Con estas componentes se reconstruyó la amplitud compleja de la tensión de salida para cada frecuencia.

El barrido de frecuencias se reconstruyó con una interpolación lineal conociendo la frecuencia inicial y final.

A continuación se hizo una medición reemplazando el piezoeléctrico por una resistencia de cerámica para estudiar el comportamiento de los cables en el rango de frecuencias utilizado.

III. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En la medición con la resistencia de cerámica se encontró que la variación de la tensión debida a la resistencia y la capacidad de los cables es del orden del fondo de escala utilizado en el lock-in. Por eso no se tuvo en cuenta en los cálculos posteriores.

En las figuras 3, 4 y 5 se observan las tensiones reales e imaginarias medidas para los tres rangos.

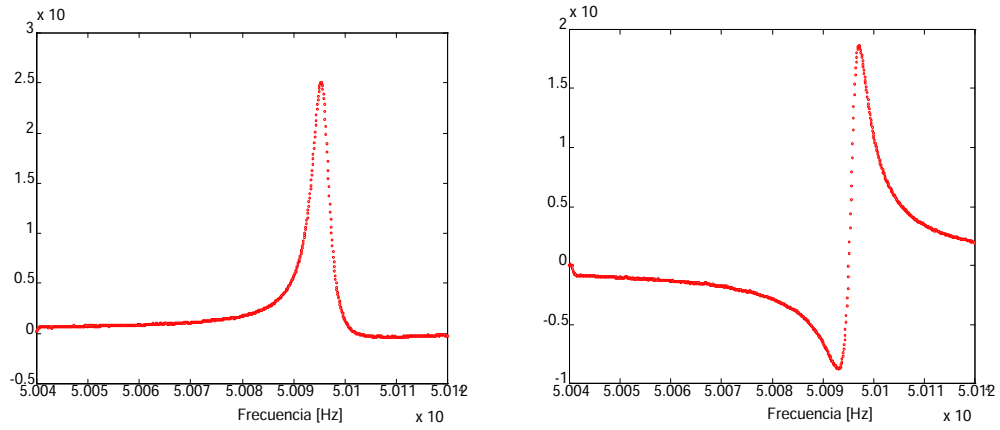


Figura 3: Componentes de la tensión real y compleja para el rango A

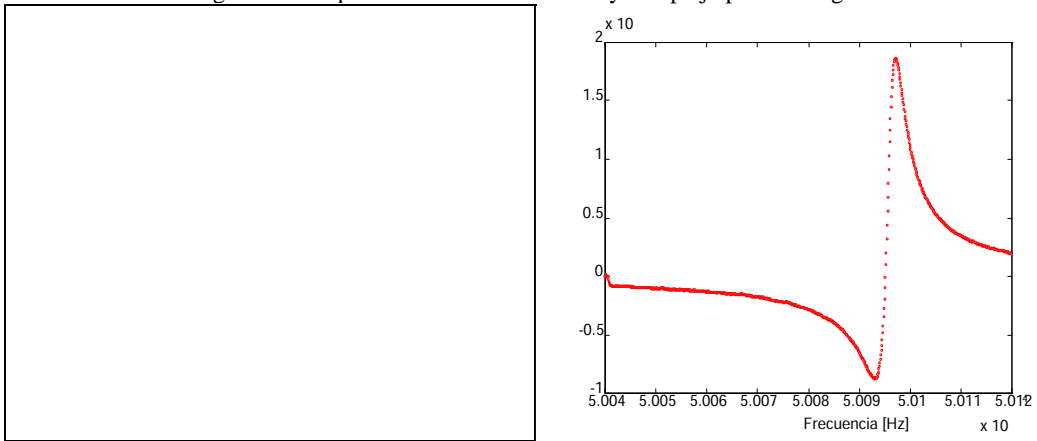


Figura 4 Componentes de la tensión real compleja para el rango B

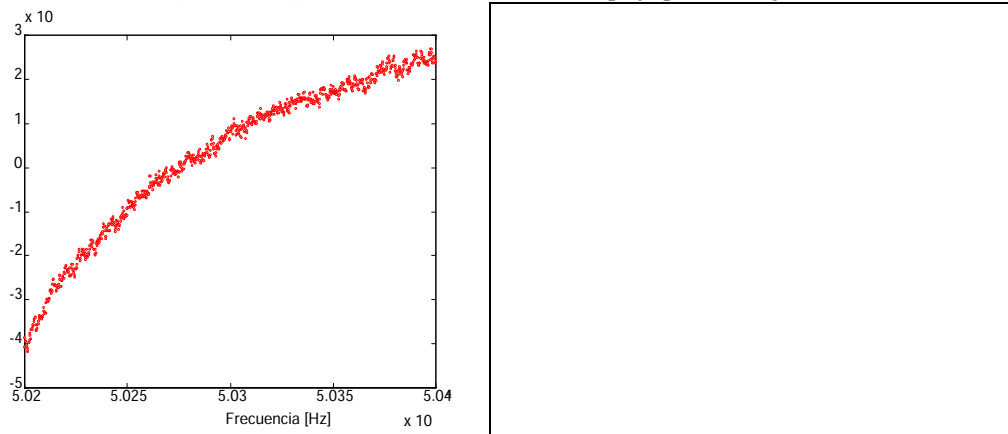


Figura 5: Tensión real y compleja para el rango C

Para cada rango se obtuvo la curva de transferencia T y la fase Φ (ver figuras 6 a 11)

$$T(\omega) = \left| \frac{V_1}{V_2} \right| = \left| \frac{R_2}{R_2 + Z_\sigma} \right| \quad (5)$$

$$tg(\Phi) = \frac{\text{Im} \left(\frac{R_2}{R_2 + Z_\sigma} \right)}{\text{Re} \left(\frac{R_2}{R_2 + Z_\sigma} \right)}$$

donde V_2 es la tensión de salida, V_1 es la tensión de entrada constante ($V_1 = 83,6 \pm 0,1 \mu\text{V}$) y Z_σ es la impedancia equivalente del piezoeléctrico.

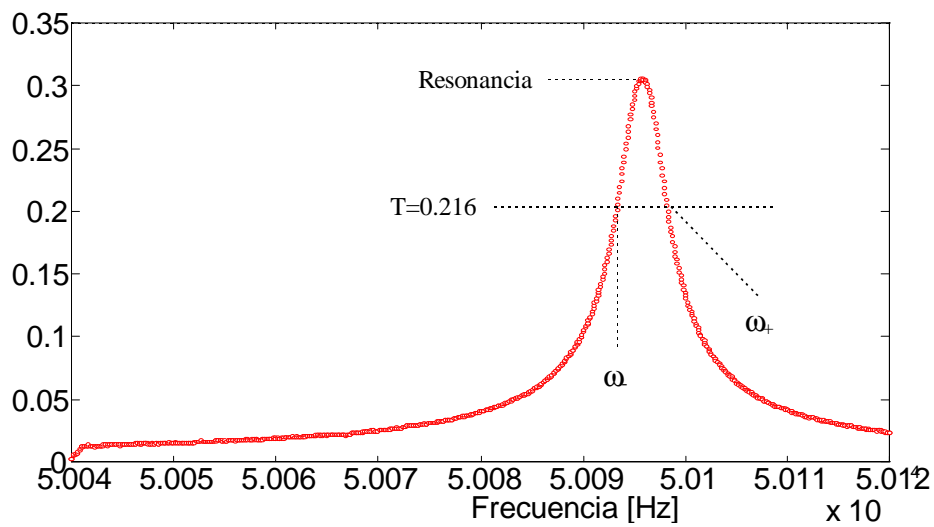


Figura 6: Curva de transferencia para el rango A

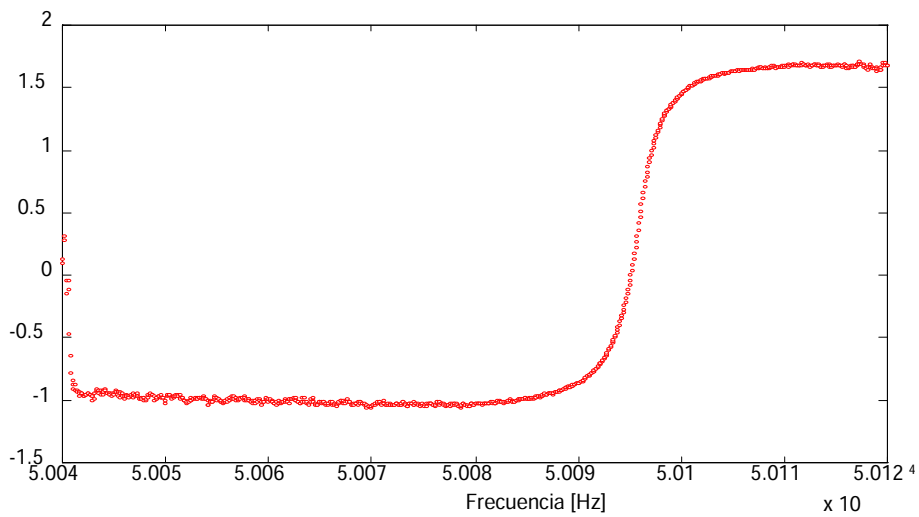


Figura 7: Fase para el rango A

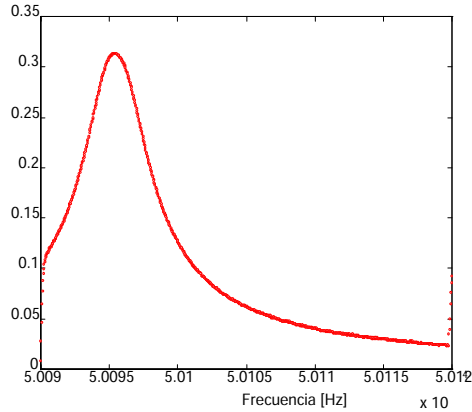


Figura 8: Transferencia para el rango B

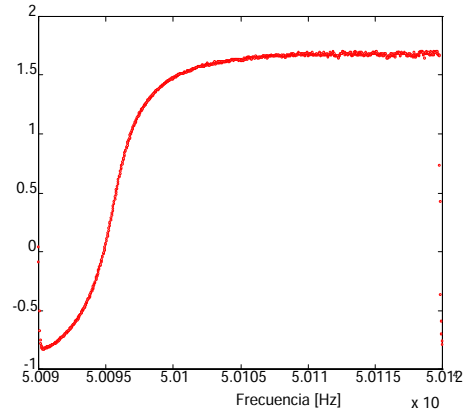


Figura 9: Fase para el rango B

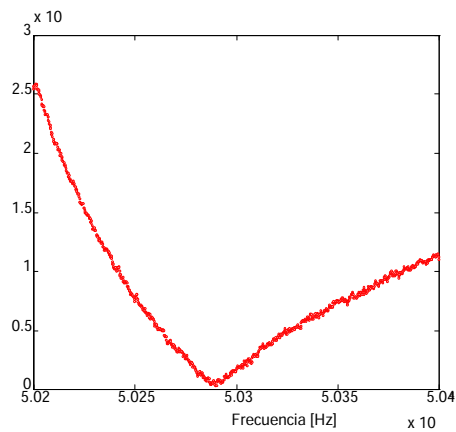


Figura 10: Transferencia para el rango C

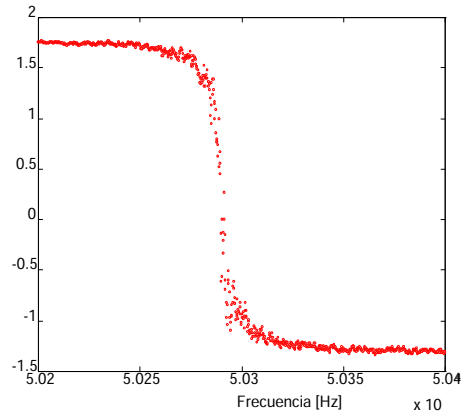


Figura 11: Fase para el rango C

En la figura 6 se observa el máximo de transferencia correspondiente a la frecuencia de resonancia

$$\omega_s = (50095,76 \pm 0,09) \text{ Hz}$$

y las frecuencias cuadrantales correspondientes a una transferencia igual a $T_{m\acute{a}x}/\sqrt{2}$

$$\omega_- = (50093,57 \pm 0,08) \text{ Hz}$$

$$\omega_+ = (50097,96 \pm 0,08) \text{ Hz}$$

$$T_{\omega_{\pm}} = 0,216 \pm 0,005$$

En las figuras 7 y 9 se puede ver el cambio de fase que se produce en la resonancia.

En la figura 10 se observa el mínimo de transferencia con el que se determinó la frecuencia de antirresonancia

$$\omega_p = (50289,8 \pm 0,2) \text{ Hz}$$

El módulo de la impedancia (figuras 12, 13 y 14) se obtuvo de la fórmula

$$|Z_{\sigma}| = R_2 \sqrt{\frac{V_1^2}{V_2^2} - 2 \frac{V_1}{V_2} \cos(\Phi) + 1} \quad (6)$$

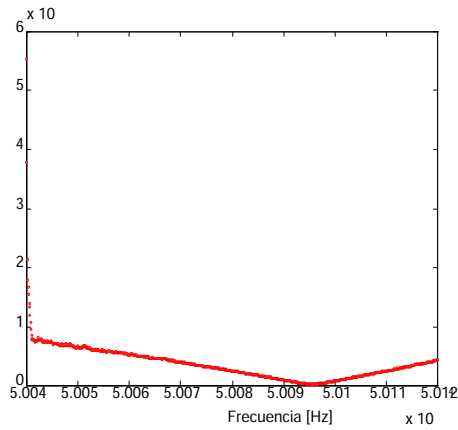


Figura 12: Impedancia para el rango A

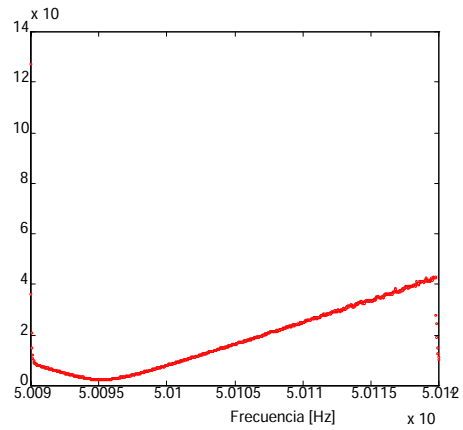


Figura 13: Impedancia para el rango B

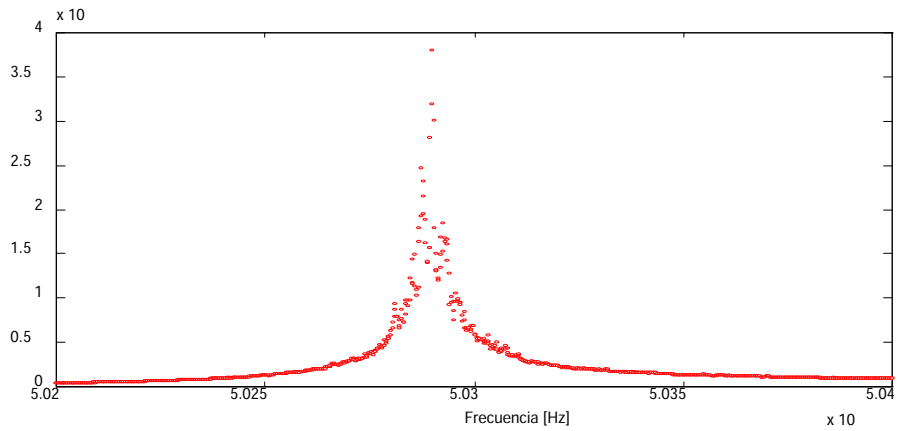


Figura 14: Impedancia para el rango C

Finalmente se graficó la susceptancia B en función de la conductancia G para la resonancia (figura 15).

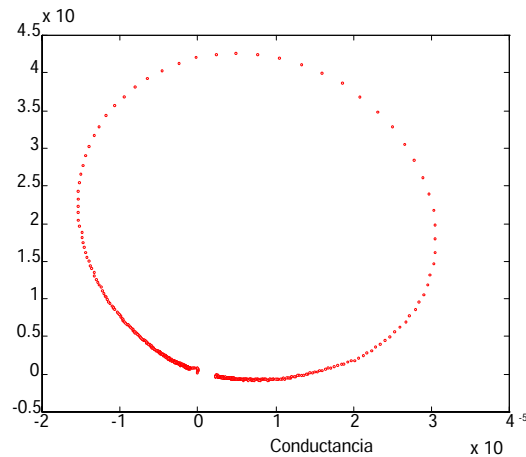


Figura 14: Susceptancia vs. Conductancia

Para un circuito RLC serie el factor de mérito se calcula como

$$Q = \frac{\omega_s}{\omega_+ - \omega_-} = \frac{\omega_s \cdot L}{R + R_2} \quad (7)$$

y se obtuvo para los valores medidos

$$Q = 11400 \pm 200$$

Además el circuito equivalente satisface las siguientes ecuaciones:

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (8)$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{L} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \right)}$$

$$T(\omega_{\pm}) = \sqrt{2} \frac{R_2}{R + R_2} = \left| \frac{V_2}{V_1} \right|_{\omega_{\pm}}$$

Con este sistema de ecuaciones y los valores medidos se calcularon los parámetros del modelo R , L , C y C' .

$$R = (36230 \pm 20) \Omega$$

$$L = (10528 \pm 5) \text{ H}$$

$$C = (3,78 \pm 0,01) 10^{-14} \text{ Farad}$$

$$C' = (4,876 \pm 0,002) 10^{-14} \text{ Farad}$$

Se realizó el gráfico de transferencia predicha por el modelo (figura 15)

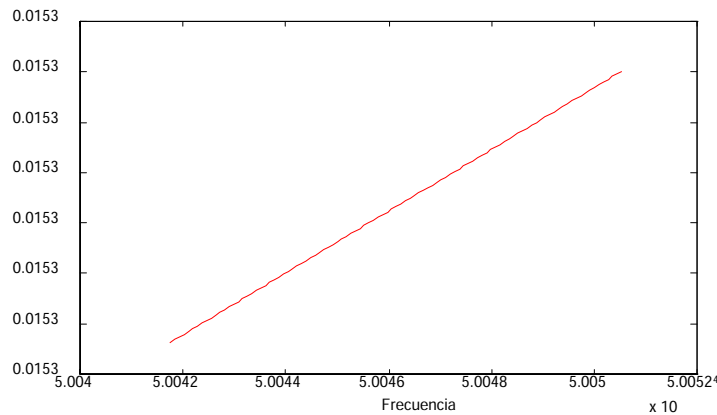


Figura 15: Transferencia teórica

Como estas curva claramente no coincide con lo medido se realizó un fiteo de los valores calculados de transferencia con la fórmula de transferencia teórica para un circuito como el de la figura 1. Se obtuvo

$$L = (1219,9998 \pm 0,0001) \text{ H}$$

$$R = (22200 \pm 50) \Omega$$

$$C = (0,71 \pm 0,01) 10^{-12} \text{ Farad}$$

$$C' = (8,2732665 \pm 0,0000005) 10^{-15} \text{ Farad}$$

En las figuras 16 a 18 pueden observarse las curvas de transferencia, fase y de conductancia vs. susceptancia predichas por este modelo.

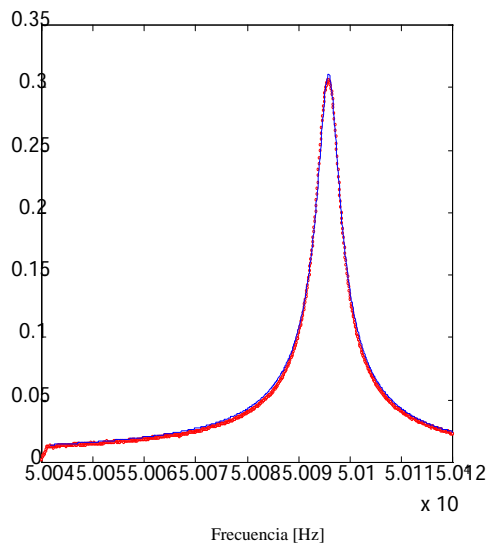


Figura 16: Transferencia calculada (en rojo) y teórica (en azul)

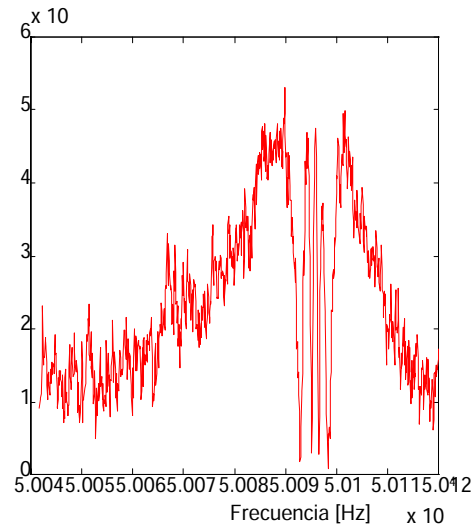


Figura 17: Error de la regresión

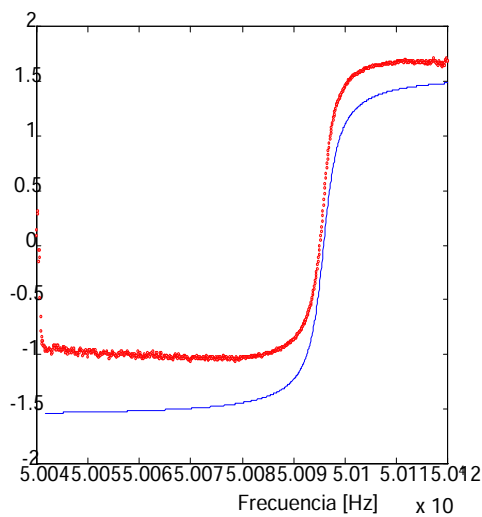


Figura 18: Fase calculada (en rojo) y teórica (en azul)

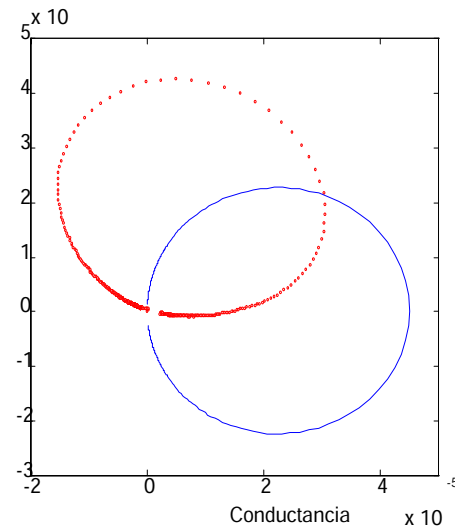


Figura 19: Susceptancia vs. Conductancia calculada y predicha por el modelo

III. CONCLUSIONES

Se obtuvo un factor de mérito para el circuito equivalente $Q = 11400 \pm 200$. Este valor tan elevado hace que la frecuencia de resonancia se encuentre muy localizada. Por eso los materiales piezoeléctricos se utilizan en circuitos donde se necesita una gran estabilidad, como timers, relojes, sintonizadores de banda fina, etc.

Es importante notar que es imposible alcanzar este número con una combinación de inductancias, capacidades y resistencias dados los elevados valores obtenidos para L y los valores muy pequeños de C y C' (según la regresión):

$$\begin{aligned}L &= (1219,9998 \pm 0,0001) \text{ H} \\R &= (22200 \pm 50) \Omega \\C &= (0,71 \pm 0,01) 10^{-12} \text{ Farad} \\C' &= (8,2732665 \pm 0,0000005) 10^{-15} \text{ Farad}\end{aligned}$$

En la figura 15 puede observarse la discrepancia entre lo predicho por el modelo calculado según las fórmulas (7) y (8) con los valores medidos. Nosotros pensamos que la forma funcional de las expresiones utilizadas para calcular R , L , C y C' introducen un error mayor en el cálculo de la transferencia que el que tenemos en nuestras mediciones (0,005). La regresión por el método del módulo mínimo ajusta a la curva de transferencia dentro del error de medición (ver figura 17), y el error obtenido para L , C y C' por este método está varios ordenes de magnitud por debajo del anterior. Sin embargo, las fase, la conductancia y la susceptancia difieren sensiblemente de los medidos. Esto puede deberse a que el modelo no es completamente adecuado para describir las fases, o a un desfase en las mediciones de tensión generado por el instrumento de medición.

ⁱ Landau y Lifshitz. *Electrodinámica de los medios continuos*, vol. VIII del *Curso de física teórica*. Pag. 70ss. Ed. Reverté.