

¡Un cortadito, por favor!

“Scherzo” sobre la ley de enfriamiento de Newton

Martín M. Saravia, Carlos Tacchi y Diego Vogelbaum

msaravia@latinsurf.com ctacchi@topmail.com.ar dievog@yahoo.com

Resumen

Se llevó a cabo un experimento para investigar quién de dos personas toma más caliente el cortado, siendo distintos los instantes en los que cada una agrega la leche. Para esto, se registraron los cambios en las temperaturas de dos tazas de café durante quince minutos. El experimento se hizo dos veces: la primera se usó agua caliente y agua fría, y en el segundo se usó café y leche. Se verá que los resultados son similares. También se realizó una derivación matemática sobre el mismo tema y posteriormente se pasó a comparar los resultados obtenidos matemáticamente con los obtenidos experimentalmente.

Introducción

Problema

Al Presidente y al Ministro de Economía les sirven sendas tazas de café a la misma temperatura y al mismo tiempo. El Presidente añade inmediatamente un chorrito de leche pero no toma su cortado hasta pasados 12 minutos. El Ministro espera 10 minutos, añade entonces la misma cantidad de leche, y toma su café 2 minutos después. ¿Quién lo toma más caliente?

Objetivo

El propósito de este experimento es investigar el enfriamiento de un líquido cuya temperatura inicial es superior a la temperatura ambiente; más precisamente, es ver si para tomar el cortado más caliente es mejor echarle la leche justo antes de tomarlo o en el momento en el cual se sirve el café.

Método experimental

Materiales

- Sensores de temperatura
- Interfaz
- Computadora, software correspondiente
- Agua fría y caliente
- Café caliente y leche fría
- Vasos de precipitación

Metodología

1. Conectar la interfaz a la computadora, y dos sensores de temperatura a la interfaz.
2. Tomar temperatura del ambiente y del agua fría y registrar.
3. Llenar dos vasos de precipitación con 150 ml de agua caliente.
4. Introducir termómetros en ambos recipientes y registrar durante 14 minutos.
5. A los 30 segundos agregar 50 ml de agua fría al recipiente del Presidente.
6. A los 630 segundos agregar 50 ml de agua fría al recipiente del Ministro.
7. Realizar una representación gráfica de los datos usando una planilla de cálculo (Excel).
8. Repetir pasos del 2 al 7 usando café y leche en vez de agua caliente y fría, respectivamente.

Resultados

En la Figura 1 muestra la temperatura del agua en función del tiempo.

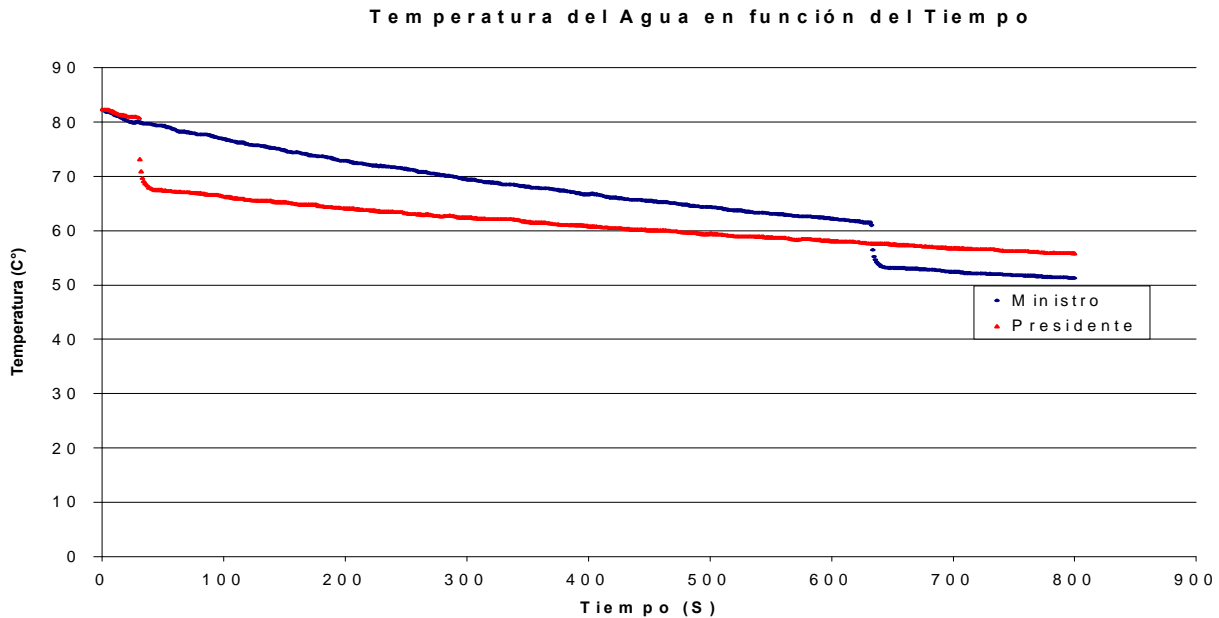


Figura 1: Temperatura del agua en función del tiempo

Se puede observar que la curva del Ministro tiene una mayor pendiente que la del Presidente. Esto se debe a que como la diferencia de la temperatura del agua del Ministro con la del ambiente es mayor, se enfriará más rápido que cuando la diferencia es menor, de acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton. Es notorio que el Ministro va a tomar el café más frío que el Presidente.

En la Figura 2 muestra la temperatura del café (o del cortado, según el instante que se observe) en función del tiempo. Puede verse que la forma de las curvas y los resultados obtenidos son similares a los de la Figura 1. Entonces, para eliminar variables nos quedamos con el primero. Supusimos que el café, al ser negro, podría perder calor de una manera distinta que el agua y lo mismo para la leche (blanca), pero esto no queda evidenciado de manera marcada en los resultados.

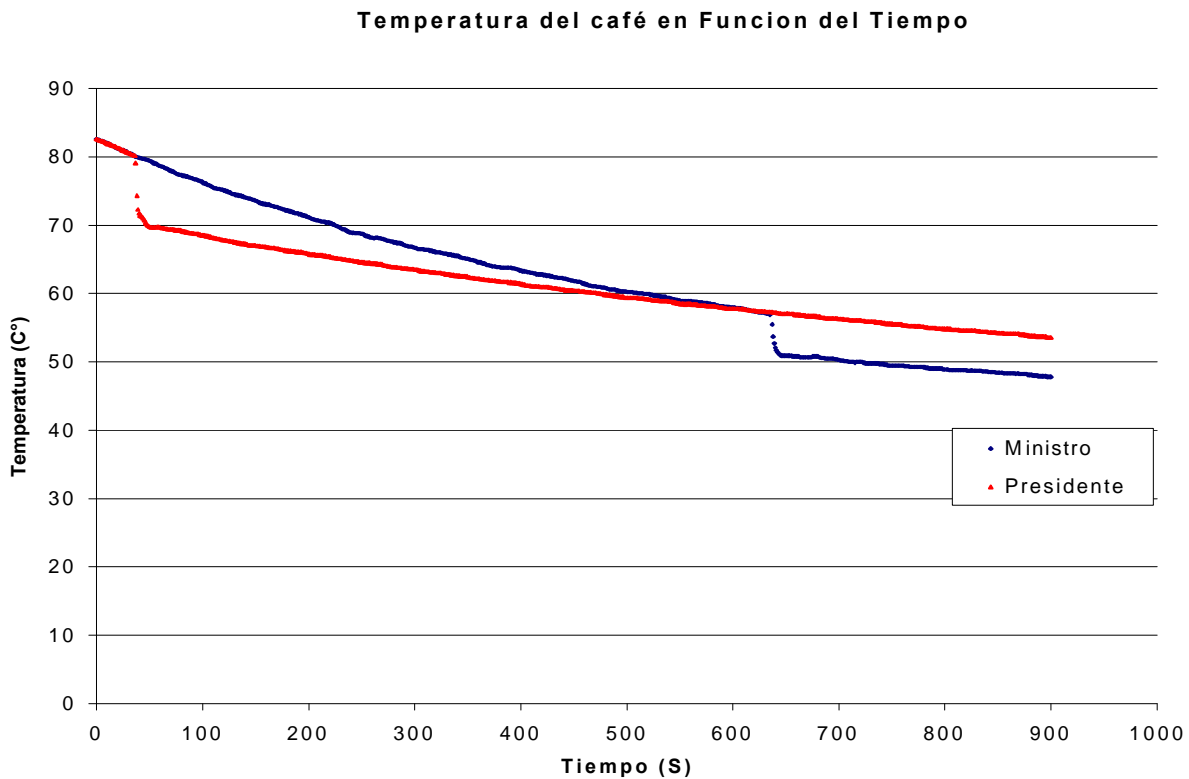


Figura 2: Temperatura del café en función del tiempo

Análisis matemático

El problema planteado también se puede resolver matemáticamente, y es lo que se llevará a cabo a continuación.

Referencias y algunas simplificaciones:

T_a : temperatura ambiente

T_c : temperatura del café

T_l : temperatura de la leche

T_m : temperatura de la mezcla (café con leche)

d, f : constantes

k : constante del enfriamiento, relacionada con el líquido que se estudia.

Cabe recordar que como hicimos el experimento dos veces, una vez usando agua caliente y agua fría, y la otra usando café y leche, y como pudimos apreciar que los resultados eran similares, se puede inferir que la constante k en el caso del café no difiere (o por lo menos no en cantidades considerables) de la constante k para el café con leche, por lo tanto usamos la misma k en ambos casos. Es decir, como si la constante k fuera la del mismo fluido, en este caso la del agua.

Para el análisis matemático se debieron realizar algunos supuestos para simplificar los cálculos. La temperatura del ambiente y la temperatura de la leche antes de mezclarla con el café las supusimos constantes, ya que las variaciones de las mismas eran muy pequeñas y no alterarían el análisis.

Ley de enfriamiento de Newton: $T'(t) = k(T_a - T(t))$

Datos iniciales

$$T_a(t) = 26,2^\circ C, \forall t$$

$$T_c(0) = 82,3^\circ C$$

$$T_l(t) = 24,4^\circ C, \forall t$$

El café con leche estaba compuesto por 150 ml de café y 50 ml de leche, es decir por un 75% de café y un 25% de leche. Por lo tanto,

$$T_m(t) = 0,75 \cdot T_c(t) + 0,25 \cdot T_l(t)$$

El Presidente mezcla el café con la leche a los 10 minutos, mientras que el Ministro los mezcla en el instante $t = 0$; ambos toman el café con leche a los 12 minutos.

Caso del Ministro

$$T_c'(t) = k(26,2 - T_c(t))$$

$$T_c'(t) + k \cdot T_c(t) = 26,2 \cdot k$$

$$T_c(t) = d \cdot e^{-kt} + 26,2$$

Y dado que $T_c(0) = 82,3^\circ C$, entonces:

$$T_c(0) = d + 26,2 = 82,3^\circ C$$

por lo tanto $d = 56,1^\circ\text{C}$.

De aquí se deduce la temperatura del café en función del tiempo:

$$T_c(t) = 56,1 \cdot e^{-k \cdot t} + 26,2$$

y como : $T_l(t) = 24,4^\circ\text{C}$

entonces: $T_m(t) = 0,75 \cdot (56,1 \cdot e^{-12k} + 26,2) + (0,25 \cdot 24,4)$

Como al café se lo toma a los 12 minutos: $T_m(12) = 42,075 \cdot e^{-12k} + 25,75$

Caso del Presidente (mezcla en el instante inicial)

$$T_m'(t) = k \cdot (26,2 - T_m(t))$$

$$T_m'(t) + k \cdot T_m = 26,2 \cdot k$$

$$T_m(t) = f \cdot e^{-k \cdot t} + 26,2$$

Como la mezcla es en el $t = 0$ s: $T_m = 0,75 \cdot 82,3 + 0,25 \cdot 24,4 = 67,825$

Por lo tanto $T_m(0) = f + 26,2 = 67,825$ entonces $f = 41,625$

Como el Presidente también toma el cortado a los 12 minutos: $T_m(12) = 41,625 \cdot e^{-12k} + 26,2$

Faltaría estimar el valor del parámetro k , para poder comparar la temperatura del café con leche del Presidente con la temperatura del café con leche del Ministro en el instante en el cual ambos lo beben (a los 12 minutos).

Usando varias de las mediciones del experimento se calculó el valor de k , y podemos estimar que este valor pertenece al intervalo $(0,2; 0,3) \text{ s}^{-1}$.

- ◆ Con $k = 0,2 \text{ s}^{-1}$, el Presidente toma el café con leche a $55,24 \text{ C}$, mientras que su Ministro lo toma a $55,1^\circ\text{C}$.
- ◆ Con $k = 0,3 \text{ s}^{-1}$, el Presidente toma el café con leche a $58,94 \text{ C}$, mientras que su Ministro lo toma a $58,84^\circ\text{C}$.

El modelo arroja como conclusión que:

Temperatura del cortado del Presidente > Temperatura del cortado del Ministro
(en el instante en que los toman)

Conclusión

Se puede concluir que quien toma el café con leche más caliente es el Presidente. Cabe destacar que las diferencias entre las temperaturas del café con leche del Presidente y las del Ministro obtenidas matemáticamente no son tan grandes como las apreciadas en el experimento; esto se debe a que para el análisis matemático realizamos algunos supuestos importantes que en el experimento no se dan. Aun así, concluimos lo mismo tanto matemáticamente como experimentalmente, es decir toma el café más caliente quien lo mezcla con leche fría en el minuto inicial.

Agradecimientos

Al Presidente y al Ministro de Economía por presentarse a realizar este experimento y donarnos parte de su valioso tiempo (y café).