

# Ley de enfriamiento de Newton considerando reservorios finitos

**María Cecilia Molas, Florencia Rodriguez Riou y Débora Leibovich**

*Facultad de Ingeniería, Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad Favaloro, C. A. de Buenos Aires, Argentina*

## Resumen

Se desea estudiar la ley de enfriamiento de Newton para casos en los cuales los reservorios son de tamaño comparable. Para ello se analiza el proceso en el cual dos volúmenes similares de agua, inicialmente a diferente temperatura, alcanzan el equilibrio térmico.

## Introducción

La ley de enfriamiento de Newton indica que:

$$\frac{d(T - T')}{dt} = -\lambda(T - T'),$$

donde T y T' son las temperaturas en cada uno de dos reservorios en contacto. La solución de esta ecuación diferencial es:

$$T - T' = (T_0 - T_0') e^{-\lambda t}$$

donde T<sub>0</sub> y T<sub>0</sub>' son, respectivamente, los valores iniciales de T y T'.

Usualmente, se realiza este estudio para casos en los cuales uno de los reservorios se considera infinito. Esto implica que, a los fines del análisis experimental, la temperatura de dicho reservorio (por lo general, el aire del laboratorio) se considera constante. Sin embargo, al realizar este planteo no se tiene en cuenta el principio de conservación de la energía. Un análisis más completo tiene en cuenta el hecho de que uno de los reservorios (o cuerpos) cede calor y disminuye su temperatura, mientras el otro absorbe calor y aumenta su temperatura.

En este trabajo se desea analizar el caso en el cual los reservorios son de tamaño semejante. Esto implica la consideración del proceso de variación de temperatura para ambos reservorios y sus llegadas al equilibrio térmico. Considerando el principio de conservación de la energía, se obtiene la siguiente expresión para la temperatura de equilibrio del sistema:<sup>1</sup>

$$T_f = \frac{C'}{C + C'} * (T_0' - T_0) + T_0$$

---

<sup>1</sup> En el apéndice del presente trabajo se realiza un análisis más detallado del desarrollo matemático.

donde  $C$  y  $C'$  son las capacidades caloríficas de las sustancias en cada reservorio.

Como requisito para el experimento se realizó la calibración de los termómetros utilizados. En la primer parte del trabajo se describe este proceso y luego se indican los resultados obtenidos.

## **Primera parte: Calibración de los termómetros**

### **Diseño experimental**

Para realizar el experimento se utilizaron dos sensores de temperatura conectados a la PC a través de una placa de adquisición de datos.

Para su calibración se utilizó como patrón un termómetro de mercurio con graduación de  $1^\circ\text{C}$  y rango de temperaturas de  $0^\circ\text{C}$  a  $100^\circ\text{C}$ .

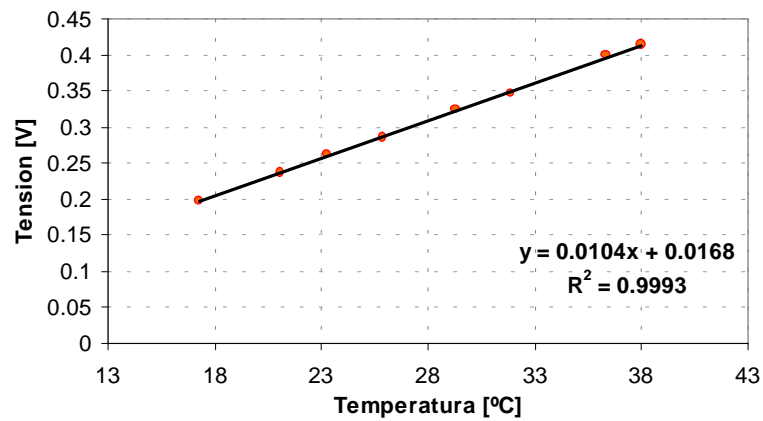
El procedimiento consistió en:

- Sumergir ambos sensores junto con el termómetro de mercurio, en un recipiente con agua.
- Registrar los valores de tensión correspondientes a cada sensor, y el valor de temperatura medido por el termómetro de mercurio.
- Repetir el paso anterior para diferentes temperaturas del agua (alcanzadas mediante el agregado de agua caliente en el recipiente).

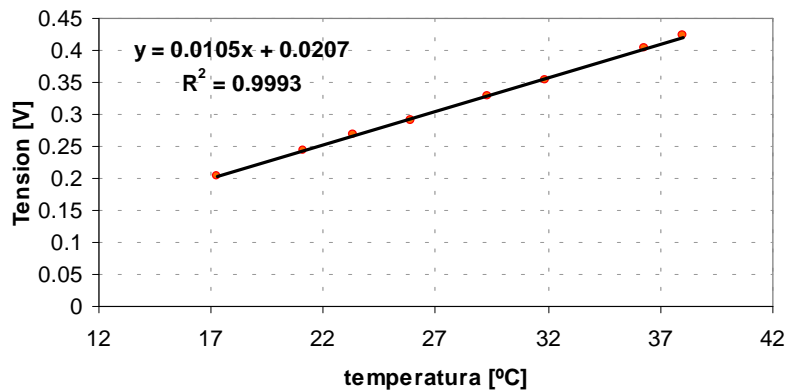
Luego se analizó gráficamente la dependencia de la tensión con la temperatura para cada sensor, y se obtuvo en cada caso la ecuación característica de dicho comportamiento.

## Resultados

En las figuras 1 y 2 se muestran los resultados obtenidos para los termómetros A y B, respectivamente.



**Figura 1.** Representación gráfica de la tensión en función de la temperatura para el termómetro A.



**Figura 2.** Representación gráfica de la tensión en función de la temperatura para el termómetro B.

Se observa que la dependencia de la tensión con la temperatura es lineal, con constante de proporcionalidad de aproximadamente 10 mV/°C.

Despejando la temperatura en función de la tensión se obtuvo:

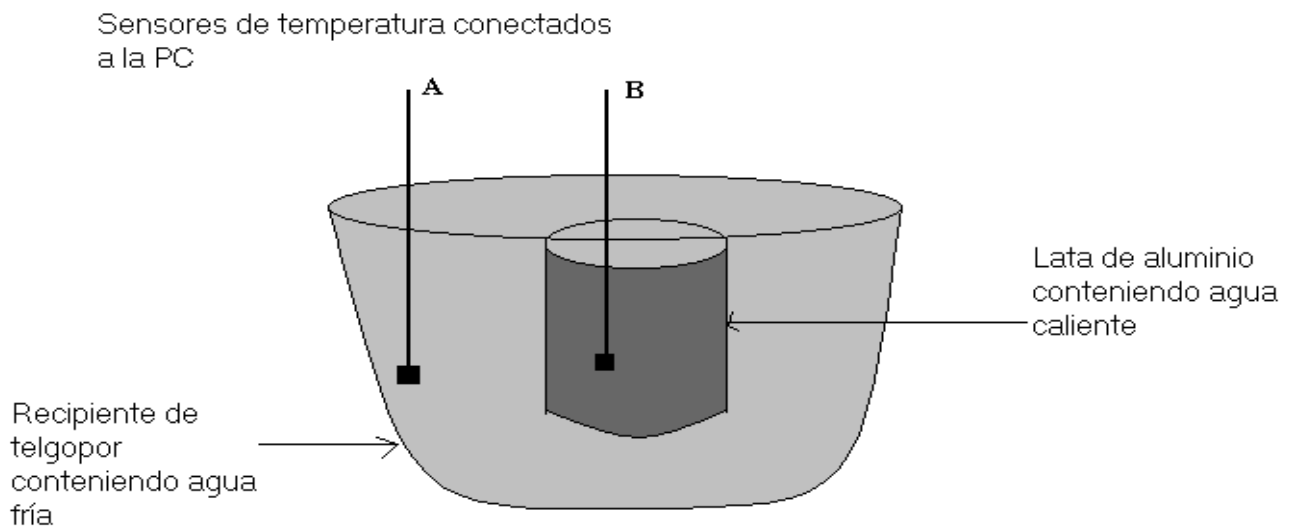
- Para el termómetro A:  $T_A [^{\circ}\text{C}] = (V_A [\text{V}] - 0.0168) / 0.0104$
- Para el termómetro B:  $T_B [^{\circ}\text{C}] = (V_B [\text{V}] - 0.0237) / 0.0105$

Estas expresiones fueron las ingresadas para la calibración de los sensores.

## Segunda parte: análisis del modelo planteado

### Diseño experimental

El dispositivo experimental utilizado (Figura 3) consiste en un recipiente de telgopor, con un volumen aproximado de  $750 \text{ cm}^3$ , que contiene en su interior una lata de aluminio de paredes delgadas (lata de bebida), con un volumen aproximado de  $300 \text{ cm}^3$ . El recipiente tiene en su tapa los orificios necesarios para la colocación de los sensores de temperatura.



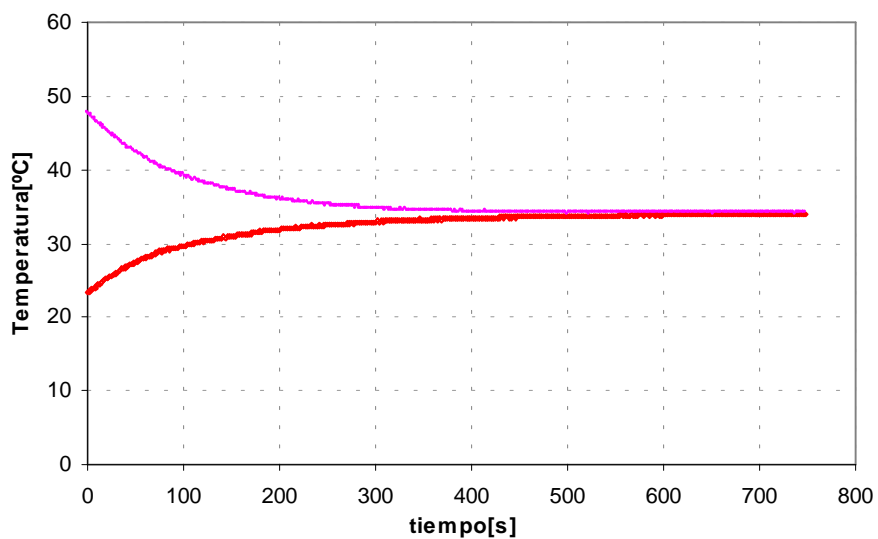
**Figura 3.** Esquema del dispositivo experimental utilizado para estudiar la ley de enfriamiento de Newton.

Con el objeto de minimizar las pérdidas de energía, se selló el recipiente con cinta aislante. Dentro de la lata se colocó agua caliente, a alrededor de  $45^{\circ}\text{C}$ , mientras que dentro del recipiente de telgopor y por fuera de la lata, se colocó agua a una temperatura cercana a  $10^{\circ}\text{C}$ . Las masas del agua fueron medidas con una balanza. Los recipientes fueron llenados de manera tal que el espacio entre el nivel del líquido en ambos y el tope del dispositivo fuese mínimo. De esta manera, se disminuye la cantidad de aire contenido en el recipiente, evitándose la consideración de un sistema de tres reservorios.

Los sensores A y B son puestos en contacto con el agua fría y caliente respectivamente.

## Resultados

La figura 4 evidencia la tendencia de los dos reservorios de alcanzar el equilibrio térmico. La temperatura de equilibrio alcanzada es de 34 °C.



**Figura 4.** Gráfica de la temperatura en función del tiempo, para ambos reservorios.

De acuerdo con la predicción del modelo, y siendo los valores medidos:

$$\text{masa}_{\text{agua caliente}} = (286,4 \pm 0,1) \text{ g}$$

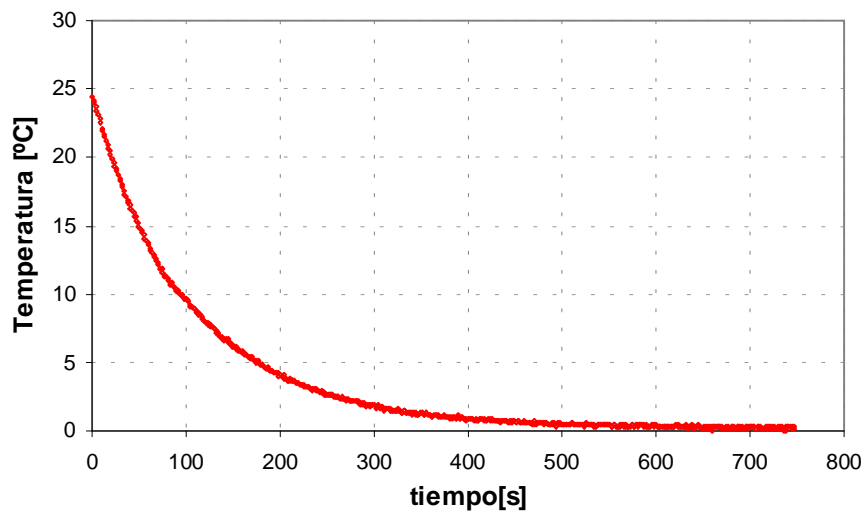
$$\text{masa}_{\text{agua fría}} = (453,1 \pm 0,2) \text{ g}$$

$$T_{0 \text{ agua caliente}} = (48,3 \pm 0,5) \text{ °C}$$

$$T_{0 \text{ agua fría}} = (22,8 \pm 0,5) \text{ °C}$$

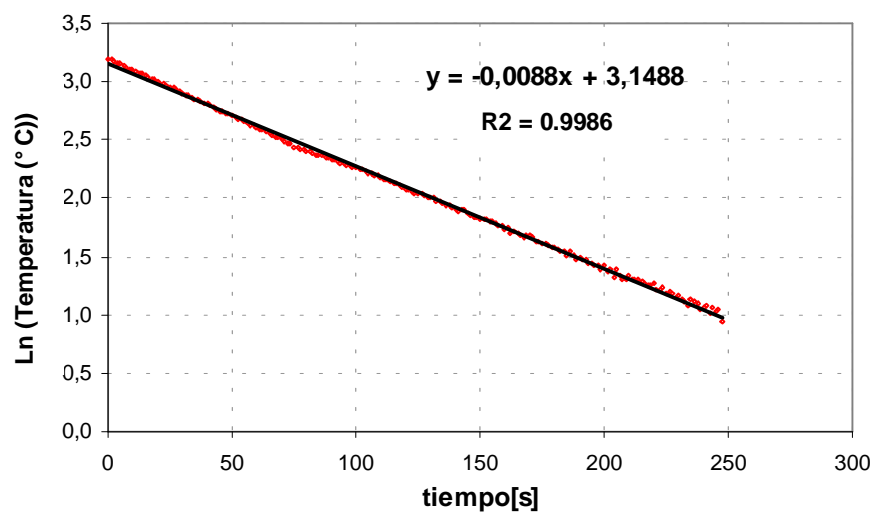
La temperatura final calculada resulta:  $T_f = (33 \pm 1) \text{ °C}$ . Este resultado concuerda, dentro del error experimental, con el observado en la gráfica.

En la figura 5 se observa que la diferencia de temperaturas en función del tiempo muestra un decaimiento exponencial. Para analizar esta función se traza en la figura 6 una gráfica de  $\ln(T_B - T_A)$  en función del tiempo.



**Figura 5.** Gráfica de la diferencia de temperatura entre los reservorios en función del tiempo.

En la figura 5 se observa que la diferencia de temperaturas en función del tiempo muestra un decaimiento exponencial. Para analizar esta función se traza en la figura 6 una gráfica de  $\ln(T_B - T_A)$  en función del tiempo.



**Figura 6.** Gráfica del logaritmo natural de la diferencia de temperatura entre los reservorios en función del tiempo en los primeros 250 s del experimento.

En la figura 6 se observa la dependencia lineal del  $\ln(T_B - T_A)$  con el tiempo, lo que está de acuerdo con el modelo planteado:

$$T - T' = (T_0 - T_0') e^{-\lambda t}$$

Por lo tanto, la ordenada al origen de esta recta representa el logaritmo natural de la diferencia de temperaturas inicial y el módulo de la pendiente representa la constante de decaimiento  $\lambda$  característica del sistema.

La ordenada al origen es  $b = 3,1488$  y según los valores medidos,  $\ln(T_0 - T_0') = 3,2$ .

El valor obtenido de  $\lambda$  es  $\lambda = 0,0088$  1/s. La inversa de este valor indica el tiempo característico del sistema, que resulta ser de 114 s.

## Conclusiones

Se concluye que el modelo ajusta a los resultados experimentales. Habiendo validado el modelo, éste puede ser utilizado por ejemplo para hallar la capacidad calorífica de diversos líquidos. Es decir, si en el experimento se utilizan dos líquidos distintos y se conoce el calor específico de uno de ellos, se puede hallar la del otro, utilizando el modelo propuesto.

## Apéndice

A partir de la ley de enfriamiento de Newton:

$$\frac{d(T - T')}{dt} = -\lambda(T - T') \quad (1)$$

y el planteo de la conservación de energía:

$$C \left( \frac{dT}{dt} \right) = C' \left( \frac{dT'}{dt} \right) \quad (2)$$

donde  $C$  y  $C'$  son la capacidad calorífica  $c$  multiplicada por la masa  $m$  de la sustancia contenida en cada reservorio.

Tomando la primer derivada de la ecuación (1) y combinándola con la ecuación (2) y su primer derivada de manera de eliminar  $T$ , se obtiene:

$$\left(\frac{d^2 T'}{dt^2}\right) = -\lambda \left(\frac{dT'}{dt}\right) \quad (3)$$

La solución de esta ecuación diferencial de segundo orden es:

$$T'(t) = k_1 * e^{-\lambda t} + k_2, \quad (4)$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  son constantes a determinar.

De manera similar a como se obtuvo (3), pero eliminando  $T'$  en lugar de  $T$ , se obtiene:

$$\left(\frac{d^2 T}{dt^2}\right) = -\lambda \left(\frac{dT}{dt}\right)$$

Por lo tanto:

$$T(t) = k_3 e^{-\lambda t} + k_4 \quad (5)$$

Para despejar las constantes  $k$  se observa que:

$$T'(0) = k_1 + k_2 = T_0' \quad (6)$$

$$T(0) = k_3 + k_4 = T_0 \quad (7)$$

$$T_f' = k_2$$

$$T_f = k_4$$

y usando que  $T' = T$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces

$$k_2 = k_4 \quad (8)$$

Finalmente, derivando (4) y (5) y reemplazando en (2) se obtiene:

$$k_1 = -\frac{C}{C'} * k_3 \quad (9)$$

Despejando de las ecuaciones (6) a (9) resulta:

$$k_1 = \frac{C}{C + C'} (T_0' - T_0) \quad (10)$$

$$k_2 = -\frac{C}{C + C'} (T_0' - T_0) + T_0' \quad (11)$$



y reemplazando (10) y (11) en (4) se obtiene:

$$T'-T_0' = \left[ \frac{C}{C+C'} (T_0'-T_0) (e^{-\lambda t} - 1) \right]$$

y de manera similar:

$$T-T_0 = \left[ -\frac{C'}{C+C'} (T_0'-T_0) (e^{-\lambda t} - 1) \right]$$

La temperatura de equilibrio resulta:

$$T_f = \left[ -\frac{C}{C+C'} (T_0'-T_0) + T_0' \right]$$

o equivalentemente:

$$T_f = \left[ \frac{C'}{C+C'} (T_0'-T_0) + T_0 \right]$$