

Ondas de calor en el suelo. Aplicación de diferencias finitas usando Excel



Leila M. Iannelli¹, Jorge A. Fiora² y Salvador Gil¹

¹Escuela de Ciencia y Tecnología, Universidad Nacional de San Martín, Martín de Irigoyen, 3100. San Martín, Provincia de Buenos Aires, Argentina.

²Instituto Nacional de Tecnología Industrial, Colectora de Avenida General Paz, 5445. San Martín, Provincia de Buenos Aires, Argentina.

E-mail: sgil@unsam.edu.ar

(Recibido el 23 de Abril 2013, aceptado el 29 de Septiembre de 2013)

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio teórico-experimental de la propagación de ondas de calor en el suelo. Las ecuaciones diferenciales del modelo desarrollado se resuelven utilizando diferencias finitas en hojas de cálculo. Las variaciones de temperaturas medidas a distintas profundidades, pueden explicarse adecuadamente con el modelo propuesto. Este experimento tiene importantes consecuencias prácticas, ya que ilustra cómo varía la temperatura en el suelo a distintas profundidades. A unos pocos metros de la superficie del suelo la temperatura es estable todo el año, y en general próxima a la temperatura de confort para las personas. Por lo tanto, es posible aprovechar este reservorio térmico que hay en el suelo para construir un acondicionador de aire natural. Este tipo de acondicionamiento reduce el uso de energía y las emisiones de gases de efecto invernadero, generando ambientes térmicamente confortables tanto en invierno (calefacción) como en verano (aire acondicionado).

Palabras clave: Diferencias finitas, ecuación de calor de Fourier, ondas de calor, experimento de bajo costo.

Abstract

In this paper we present a theoretical and experimental study of the heat waves propagation in soil. The differential equations are solved model developed using finite differences in spreadsheets. The measured temperature variations at different depths can be explained adequately with the proposed model. This experiment has important practical consequences, as it illustrates how temperature varies in the soil at different depths. At few meters from surface temperature of the soil is very stable throughout the year, and generally close to the comfort temperature for the people. Therefore, it is possible to exploit this thermal reservoir in the soil to build a natural air conditioner. This type of conditioning reduces energy use and emissions of greenhouse gases, generating thermally comfortable environments in both winter (heating) and summer (air conditioning).

Keywords: Finite difference, Fourier equation of heat, heat waves, low-cost experiment.

PACS: 88.10.Cn, 88.05.Ec, 07.05.Bx, 44.10.+i, 72.15.Eb, 91.35.Dc, 01.50.My, 01.90.+g

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

En muchos cursos de física para estudiantes de ciencias e ingeniería, se discute la ecuación de difusión del calor [1]. Sin embargo, solo unos pocos problemas tienen soluciones analíticas simples, adecuadas para cursos introductorios [1, 2]. Por otra parte, los docentes de física siempre estamos ansiosos de introducir en nuestros cursos tópicos que sirvan para ilustrar aspectos novedosos, motivadores de nuevos proyectos y que ilustren cómo la física puede contribuir a resolver problemas de alto impacto social.

En este artículo presentamos un proyecto de bajo costo, fácil de realizar en las universidades y que tiene importantes implicancias económicas y medioambientales. El problema consiste en medir las temperaturas del suelo a distintas profundidades a los largo de algunos días y tratar de explicar los resultados usando las leyes de la física, *i.e.* la difusión del calor [2].

El estudio de la variación de las temperaturas del suelo a distintas profundidades, tiene múltiples aplicaciones prácticas. Entre ellas: i) cómo la temperatura del suelo afecta la germinación de las semillas y la tasa de crecimiento de las plantas, ii) la temperatura del suelo también afecta y condiciona el contenido de humedad, la aireación y la disponibilidad de nutrientes, iii) conocer las propiedades térmicas del suelo nos permite conocer las profundidades a la que deben instalarse los caños de agua para evitar que se congelen, iv) conocer estas propiedades nos da la posibilidad de usar el suelo como un acondicionador natural del aire. Esta última alternativa, como veremos, contribuye a minimizar el uso de combustibles fósiles para la calefacción y refrigeración. Así el uso del suelo como elemento de pre-acondicionamiento térmico contribuye a la disminución de las emisiones de gases de efecto invernadero (GEI), que es uno de los grandes desafíos del presente siglo, para mitigar el

calentamiento global que estamos experimentando en la Tierra [4, 3].

En el caso de Argentina, el consumo de energía en edificios (residenciales, comerciales y públicos) es de aproximadamente el 31 % del total. De este consumo, alrededor del 58 % se usa en viviendas para acondicionamiento de aire, calefacción y refrigeración. Por lo tanto, al menos el 18 % del consumo energético total de

este país, se emplea en acondicionamiento térmico [5]. Ver Fig. 1. En los EE.UU. se estima que la proporción de energía usada en acondicionamiento térmico de viviendas y edificios es superior al 20% de toda la energía usada en ese país [6]. En general, el uso de energía en acondicionamiento térmico del aire, es una fracción muy significativa de la matriz energética de muchos países y del mundo.

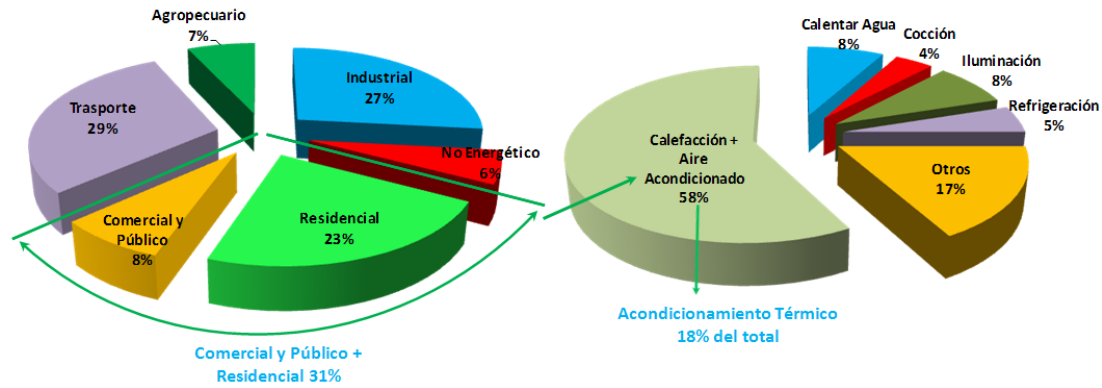


FIGURA 1. Usos de la energía en Argentina. Aproximadamente el 18% (58% de 31%) del total de la energía se utiliza en acondicionamiento térmico de ambientes. Fuente: Secretaría de Energía de la Nación (2010) [5].

Como veremos, a unos pocos metros de la superficie, la temperatura del suelo es muy estable todo el año y próxima a la temperatura de confort, por lo tanto es posible usar la tierra como un acondicionador de aire natural. De este modo, el estudio de las propiedades térmicas del suelo está bien justificado.

En una publicación anterior realizamos un estudio de las propiedades térmicas del suelo, usando un modelo analítico aproximado [7]. Ese modelo, si bien describe adecuadamente las tendencias globales del problema y justifica el uso de tubos enterrados como elementos útiles para el acondicionamiento térmico de viviendas [8, 9], es inadecuado para describir las variaciones diarias de las temperaturas a distintas profundidades. Esto se debe principalmente, a que las temperaturas tienen una periodicidad diaria, que varía en forma irregular de un día a otro. El objetivo de este trabajo es mostrar cómo una modificación en el enfoque del problema, permite explicar muy bien las temperaturas a distintas profundidades como función del tiempo. La técnica usada consiste en resolver numéricamente la ecuación de difusión del calor mediante diferencias finitas, usando una hoja de cálculo. Como condición de borde usamos la temperatura del suelo próxima a la superficie.

Esta aproximación al problema, posibilita estudiar el comportamiento térmico del suelo, usando un esquema simple y accesible a estudiantes principiantes, a la par que ilustra la utilidad del uso de diferencias finitas para resolver un problema práctico, usando herramientas informáticas simples y de uso habitual.

II. MODELO TEÓRICO

El Sol calienta periódicamente a la Tierra. Podemos imaginar a la Tierra como un sistema semi-infinito unidimensional, donde la fuente de calor está en la superficie, que absorbe la energía del Sol. En este caso es conveniente elegir el eje z en dirección vertical y penetrando en la Tierra. La ecuación de difusión del calor puede escribirse como [7]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

donde α es la difusividad térmica del material y T es la temperatura. A su vez la difusividad, α , depende de la constante de conductividad térmica del material, K , su densidad, ρ , y de su calor específico, c ; *i.e.* $\alpha=K/\rho.c$. Implícito en la Ec. (1) está el hecho que el calor fluye de la zona de mayor temperatura a la menor, es decir que la Ec. (1) conlleva implícito el segundo principio de la termodinámica. En el método de diferencias finitas reemplazamos a las derivadas por diferencias. Así la segunda derivada puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \approx \frac{T(z + \Delta z, t) - 2T(z, t) + T(z - \Delta z, t)}{\Delta z^2} = \frac{T_{m+1}^i - 2T_m^i + T_{m-1}^i}{\Delta z^2}, \quad (2)$$

y la primera derivada de la temperatura respecto al tiempo ($\partial T/\partial t$) se puede expresar como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T(z, t + 1) - T(z, t)}{\Delta t} = \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} \quad (3)$$

En este modelo se utiliza la notación en subíndice m y superíndice i , donde $m = 0, 1, 2, \dots, M$ es el conteo de los nodos en la dirección z e $i = 0, 1, 2, \dots, I$ es el conteo de los intervalos de tiempo. Las coordenadas del nodo (m, i) corresponden a $z_m = m \cdot \Delta z$ y $t_i = i \cdot \Delta t$, y para la temperatura en el nodo (m, i) se usa la notación T_m^i que representa la temperatura en el nodo m en el intervalo de tiempo i , o sea $T_m^i = T(t_i, z_m)$. Reemplazando las Ecs. (2) y (3) en la Ec. (1), se obtiene:

$$\begin{aligned} T_{m-1}^i - 2T_m^i + T_{m+1}^i &= \frac{\Delta z^2}{\alpha \Delta t} (T_m^{i+1} - T_m^i) \\ &= \frac{1}{\tau} (T_m^{i+1} - T_m^i), \end{aligned} \quad (4)$$

o también

$$T_m^{i+1} = T_m^i + \tau (T_{m-1}^i - 2T_m^i + T_{m+1}^i), \quad (5)$$

donde $\tau = \alpha \cdot \Delta t / \Delta z^2$ es una cantidad adimensional, conocido como el número de Fourier, cuyo valor es fundamental para la convergencia o estabilidad del método numérico a utilizar.

La Ec. (5) corresponde al *método explícito*, ya que la derivada con respecto al tiempo se expresa en forma de diferencia hacia adelante en tiempo. El método explícito es condicionalmente estable, es decir que surge una característica que restringe su utilización. Para que la solución sea estable τ debe ser menor a 0,5 [1]. En el Apéndice A se presenta una justificación heurística de este criterio de estabilidad. De este modo el valor más grande admisible del intervalo de tiempo Δt queda limitado por el criterio de estabilidad, es decir $\Delta t < 0,5 \cdot \Delta z^2 / \alpha$.

Hay varios métodos numéricos más elaborados que son muy eficientes para resolver numéricamente una ecuación diferencial parcial y que no presentan problemas de estabilidad, como el *método implícito* o el de Crank-Nicolson [1, 11]. Pero no resultan tan intuitivos como el implícito y son más complicados de implementar en una hoja de cálculo. Para fijar las condiciones de borde, se utilizan las temperaturas del suelo medidas a unos pocos centímetros de la superficie y el hecho de que la temperatura a unos 4 ó 5 metros de profundidad es igual a la temperatura media anual en esa localidad. La predicción de la temperatura $T(t_{i+1}, z_m) = T_m^{i+1}$, según la Ec. (5), se realiza con el esquema de la Fig. 2.

Para conocer la solución de $T(t, z)$ en todos los puntos, se requiere conocer $T(t=t_0, z)$, es decir el tiempo $t=t_0$, las temperaturas a distintas profundidades y también $T(t, z=z_0)$. En nuestro caso tomamos $t_0=0,42$ días y $z_0=10$ cm, con lo que $T(t, z_0)$ es la temperatura registrada hora a hora por un termómetro enterrado a 10 cm de profundidad del suelo.

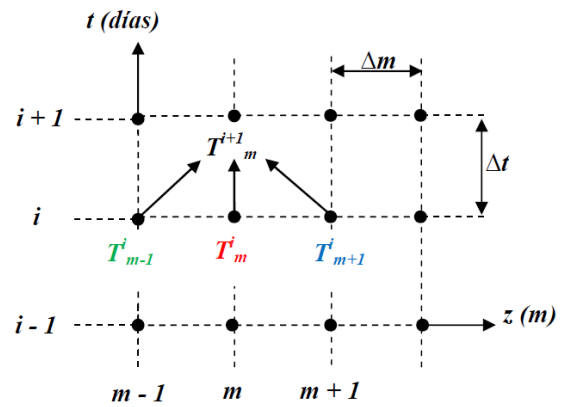


FIGURA 2. Esquema de cálculo empleado en la solución por diferencias finitas.

Nótese que la referida $T(t, z_0)$ corresponde en este caso, a la temperatura de la tierra a $z_0=10$ cm de profundidad, lo que no es igual a la temperatura ambiente. Para $t=t_0$, tomamos una condición de borde los valores de temperaturas realmente registradas en los termómetros a distintas profundidades al tiempo $t=t_0$. Dado que se requieren datos a todas las coordenadas z_m , estos datos se obtienen extrapolando estas temperaturas a partir de los datos adquiridos al instante t_0 . Después de unos 3 ó 4 días, la solución numérica deja de depender de esta condición de borde $T(t_0, z)$. Los datos de los termómetros a $z=10, 20, 30$ y 90 cm de profundidad se registraron mediante data loggers como función del tiempo y sirven para someter a prueba experimental el modelo propuesto, Ec. (5). Un ejemplo de hoja de cálculo con la solución de la ecuación diferencial (1) mediante diferencias finitas se puede bajar de Internet [10].

III. EXPERIMENTO

Para este experimento se utilizó una sonda de plástico, a la cual se le realizaron cuatro perforaciones a lo largo del eje vertical, z , en las cuales se introdujeron los sensores térmicos. En la Fig. 3 se muestra un diagrama esquemático del sistema experimental que se construyó para realizar las mediciones de la temperatura en función del tiempo. Se introdujo la sonda con los termómetros en el suelo a la intemperie y a su alrededor se le colocó la misma tierra extraída al realizar la perforación. Los sensores, eran PT100, conectados a sendos data loggers. Las temperaturas se registraron cada hora a lo largo de varios días. Se estudió la propagación de las ondas a lo largo de varios meses, pero con unos dos o tres días de mediciones ya se pudo observar los efectos más notables del suelo.

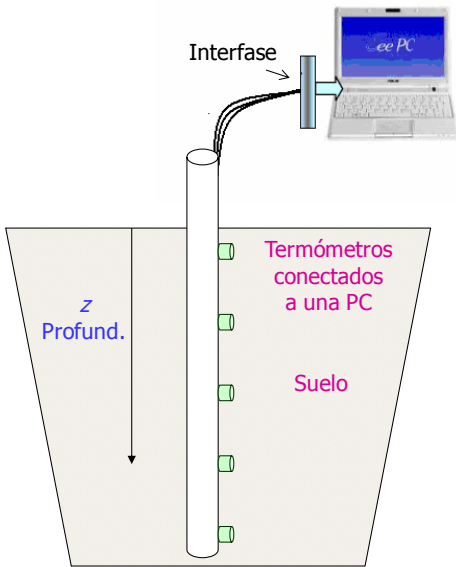


FIGURA 3. Arreglo experimental para medir las ondas térmicas del suelo a diversas profundidades.

La Fig. 4 representa la comparación de los datos medidos y los calculados con el modelo teórico, obtenido por el método de diferencias finitas, Ec. (4). La solución se obtuvo usando una hoja de cálculo estándar e implementando el algoritmo descrito en la Fig. 2.

Los valores de temperatura para $z=10$ cm, se toman como condición de contorno. El modelo es capaz de reproducir los datos experimentales medidos adecuadamente a varias profundidades ($z = 10, 20, 30$ y 90 cm) como función del tiempo. Se observa una atenuación de la onda térmica a medida que ésta penetra más en el suelo, en particular esa atenuación es más pronunciada para las frecuencias más altas. Este efecto se observa claramente en la Fig. 4. A medida que observamos temperaturas a mayores profundidades, las oscilaciones rápidas se van atenuando, permaneciendo solo las tendencias más lentas. Así la tierra actúa como un filtro paso bajo. Las frecuencias altas son atenuadas paulatinamente a medida que penetramos en la tierra. Sin embargo, las variaciones rápidas se van reduciendo conforme aumenta la profundidad [2, 7].

IV. RESULTADOS

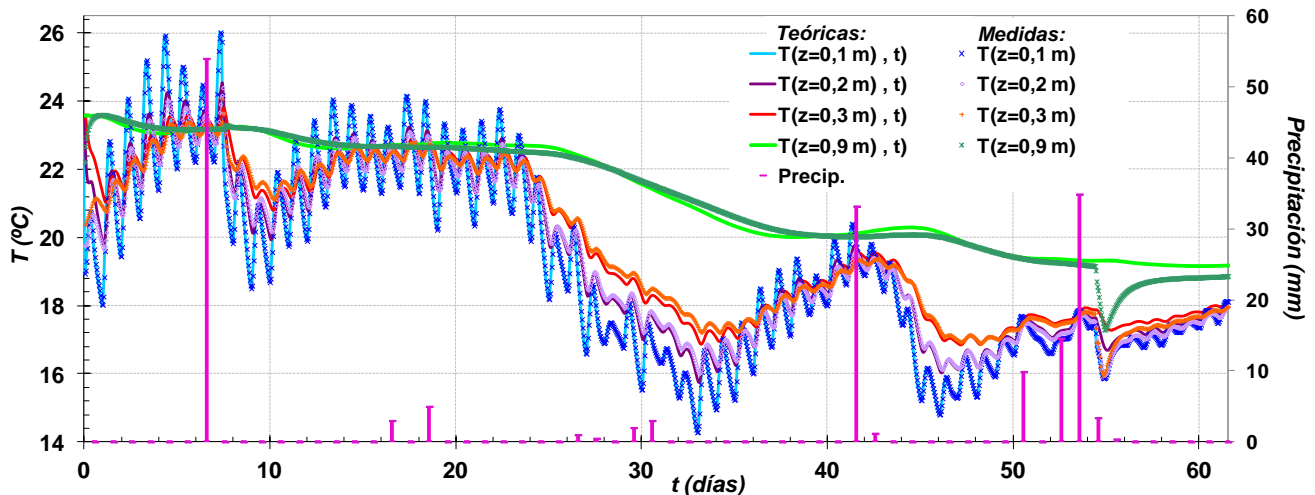


FIGURA 4. Temperaturas medidas y teóricas a diferentes profundidades en función del tiempo. Las líneas verticales (en color rosa) indican días con precipitación y su medida (Brindadas por el Servicio Meteorológico Nacional). Estos datos fueron obtenidos desde el día 28 de marzo de 2012 hasta el día 29 de mayo del mismo año, en Buenos Aires.

Como se observa en la Fig. 4, donde se muestran las temperaturas medidas a diferentes profundidades como función del tiempo, junto con las predicciones del modelo propuesto, la concordancia entre las mediciones y las expectativas teóricas es muy buena. Solo se observan algunas desviaciones en los días inmediatamente después de fuertes lluvias, que claramente afectan la difusividad del terreno, pero que al cabo de un par de días se recupera y vuelve a su valor normal. Las precipitaciones se representan por líneas verticales, referidas al eje vertical derecho, donde se indica la cantidad de mililitros registrada en cada día.

V. CONCLUSIONES

El modelo propuesto reproduce adecuadamente las variaciones térmicas del suelo. Es de muy simple resolución mediante una hoja de cálculo. Se observa que a una profundidad del orden de 1 a 5 m, la temperatura del suelo es muy próxima a la temperatura de confort todo el año. De este modo, el modelo provee una herramienta muy útil para predecir la profundidad óptima a la que sería conveniente colocar tubos enterrados, para mejorar el acondicionamiento térmico de ambientes en edificios.

Así esta actividad no solo ilustra el comportamiento térmico del suelo, sino que además permite entender teóricamente este comportamiento usando la ecuación de difusión del calor. También la resolución numérica de la ecuación diferencial, ilustra la utilidad del uso de modelos numéricos para resolver problemas prácticos reales.

Por lo expuesto anteriormente, se estima que el potencial térmico de la Tierra puede ser explotado y utilizando en beneficio del hombre y del medio ambiente.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento a la colaboración entre la ECyT de la UNSAM, el ENARGAS y el Grupo de INTI – ENERGÍA, para poder realizar este estudio. Asimismo agradecemos la colaboración de Roberto Prieto y Enrique Bezzo de ENARGAS. Por último, agradecemos a Pablo Romero, Pedro Cozza y Ángel Bermejo del grupo INTI – ENERGÍA por la construcción del dispositivo experimental.

REFERENCIAS

- [1] Cengel, Y. A., *Transferencia de Calor y Masa*. Un enfoque práctico, Tercera Edición ed., (Mc Graw Hill, México, 2007).
- [2] Iannelli, L., y Gil, S., *Ondas de Calor - Determinación de temperaturas del pasado*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **6**, 82 - 98 (2012).
- [3] World Meteorological Organization, Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC), Fourth Assessment Report: Climate Change (2007), <http://www.wmo.int/pages/partners/ipcc/index_en.html>, Consultado el 05 de Marzo de 2013.
- [4] Mastrandrea, M. D. and Schneider, S. H., *Resource Letter GW-2: Global Warming*, Am. J. Phys. **76**, 608-614 (2008).
- [5] Secretaría de Energía de la Nación,» 2010, <http://energia3.mecon.gov.ar/contenidos/verpagina.php?id_pagina=3366> Consultado el 03 de Diciembre de 2012.
- [6] Glickman, L. R., *Energy efficiency in the built environment*, Physics Today, pp. 40, July (2008).
- [7] Iannelli, L. y Gil, S., *Acondicionamiento Térmico de Aire Usando Energía Geotérmica-Ondas de Calor*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **6**, 99-105 (2012).
- [8] Arquitectura subterránea, de Wikipedia, <http://es.wikipedia.org/wiki/Arquitectura_subterr%C3%A1nea>, Consultado el 27 de Diciembre de 2012.
- [9] Sharan, G., *Earth Tube Heat Exchangers for Environmental Control of Farm Buildings in Semi-arid Northwest*, (Indian Institute of Management Ahmedabad, India, 2008).
- [10] Ejemplos de archivos Excel que ilustran este tipo de cálculo pueden ser bajados de <www.fisicarecreativa.com>. En este sitio de Internet se publican proyectos experimentales desarrollados por estudiantes de diversas universidades de Argentina.

Ondas de calor en el suelo. Aplicación de diferencias finitas usando Excel
 [11] Neta, B., *Partial Differential Equations*, Lecture Notes, Department of Mathematics, Naval Postgraduate School, Monterey, CA. (2009).
 <<http://www.math.nps.navy.mil/~bneta/pde.pdf>>, Consultado el 19 de Abril de 2013.

Apéndice A: Criterio de estabilidad para el método explícito

Como se indicó más arriba, la ecuación de difusión del calor lleva implícito el segundo principio de la termodinámica, más específicamente en los signos de la Ec. (1). Para resolver numéricamente esta ecuación, discretizamos la distancia z en intervalos regulares Δz y el tiempo en intervalos regulares Δt , como se ilustra en la Fig. 5. Para la temperatura en el nodo (m, i) se usa la notación T_m^i , siendo $z_m = m \cdot \Delta z$ y $t_i = i \cdot \Delta t$. Según la Ec. (4), la variación de la temperatura en el nodo i , en un tiempo Δt , que lo denotamos por $\delta T = T_m^{i+1} - T_m^i$, es igual a $\alpha \cdot \Delta t \cdot (\partial^2 T / \partial z^2)$. De acuerdo con la Ec. (5):

$$\alpha \cdot \Delta t \cdot (\partial^2 T / \partial z^2) \approx \frac{\alpha \cdot \Delta t}{\Delta z^2} [T_{m-1}^i - 2T_m^i + T_{m+1}^i] \quad (6)$$

$$= 2 \cdot \tau \cdot [(T_{m-1}^i + T_{m+1}^i) / 2 - T_m^i] = 2 \cdot \tau \cdot \Delta T,$$

donde $\tau = \alpha \cdot \Delta t / \Delta z^2$ es el número de Fourier y ΔT la diferencia entre la media $(T_{m-1}^i + T_{m+1}^i) / 2$ de los extremos y la temperatura del punto central T_m^i . Geométricamente, δT , se ilustra en la Fig. 5.

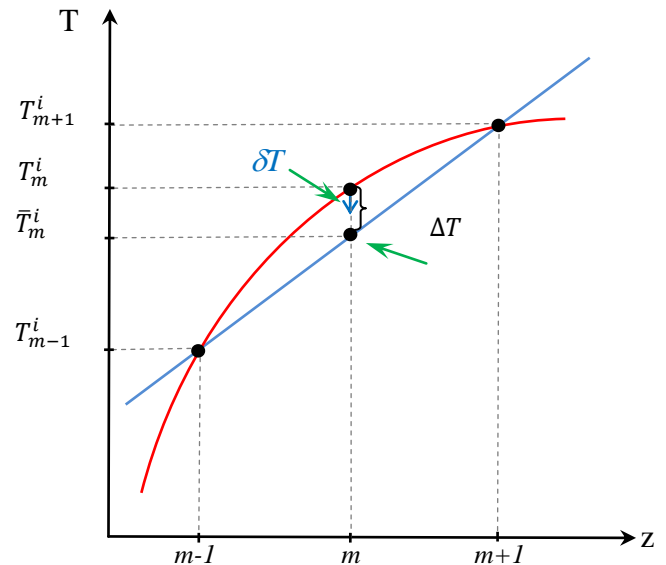


FIGURA 5. Tres nodos consecutivos $m-1$, m y $m+1$. La curva de color rojo es la función estudiada y la línea de color azul es su derivada segunda.

Con esta notación la Ec. (5) se puede escribir como:

$$\delta T = 2 \cdot \tau \cdot \Delta T. \quad (7)$$

Según el segundo principio de la termodinámica, implícito en la Ec. (1), las siguientes situaciones ilustradas en la Fig. 6, son posibles, pero las situaciones ilustradas en la Fig. 7

no son posibles. Esto es así, pues en los dos casos de la Fig. 6, las derivadas segundas de T respecto de z son distintas de cero, y según la Ec. (1), la evolución temporal de la temperatura es la indicada por la flecha azul. Geométricamente, la ecuación de difusión, Ec. (1), evoluciona de modo de disminuir la concavidad de T(z).

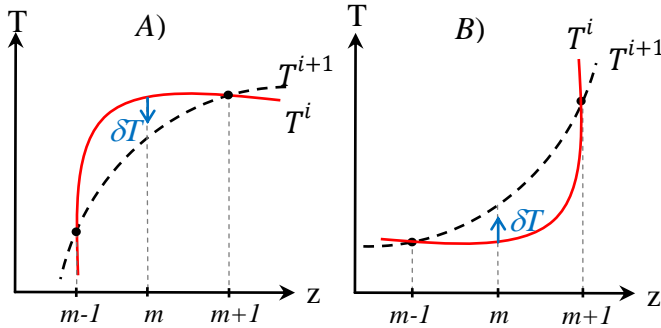


FIGURA 6. Situaciones posibles por el segundo principio de la termodinámica.

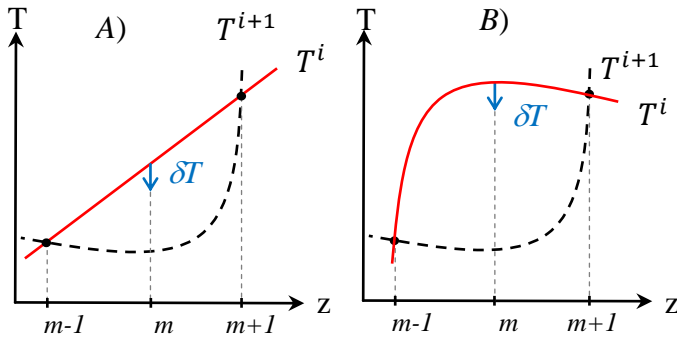


FIGURA 7. Situaciones no posibles por el segundo principio de la termodinámica.

En la Fig. 7 A), la derivada segunda de T respecto de z es nula y por consiguiente la temperatura no varía en el tiempo. La situación ilustrada en la Fig. 7 B) tampoco es posible, pues la concavidad pasa de un signo a otro, que por lo indicado más arriba no es posible.

Matemáticamente, estas condiciones físicas se pueden resumir escribiendo:

$$\delta T \leq |\Delta T|. \quad (8)$$

O equivalentemente, según la Ec.(7), como

$$2\tau \leq 1 \rightarrow \tau \leq \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad |\Delta t| \leq \frac{\Delta z^2}{2\alpha}. \quad (9)$$

Un aspecto interesante del método explícito, descrito en este trabajo, es que además de ser de muy simple implementación en hojas de cálculo, su estabilidad ilustra un aspecto físico importante como es el segundo principio de la termodinámica. Desde luego existen otros muchos métodos numéricos más eficientes que el método directo, pero desde el punto de vista didáctico, creemos que el método directo ofrece muchas ventajas, como las discutidas en este apéndice.