

# Bifurcación del período en un circuito RL-Diodo

Cecilia Bejarano - Tomás Teitelbaum

Laboratorio 5 - Dpto. de Física – FCEyN – UBA Marzo 2004

*Se estudió la ruta que conduce al régimen caótico de un sistema no lineal (circuito RL-Diodo) mediante el fenómeno de bifurcación de períodos. Los parámetros que se variaron para observar dichas bifurcaciones fueron la frecuencia y la amplitud de la señal excitadora manteniendo la restante magnitud constante. Se alcanzó a observar una señal en el circuito cuyo período era, respectivamente, 8 y 16 veces aquella de la señal de entrada. Con esto fue posible calcular la constante de Feigenbaum para tres casos:  $\delta=4.19\pm 0.19$  (al variar frecuencia),  $\delta=3.57\pm 0.04$  y  $\delta=4.7\pm 0.2$  (al variar amplitud) al considerarse en este último caso las tres primeras o las tres últimas de las bifurcaciones observadas.*

*La no linealidad del sistema se vio reflejada en la presencia de sub-armónicos en los espectros de frecuencias correspondientes a cada señal de salida. Sin embargo, no fue posible observar la transición al régimen caótico del sistema estudiado.*

## Introducción

El presente trabajo muestra las distintas características cualitativas y cuantitativas que refleja un sistema no lineal para el cual *no* vale el principio de superposición.

En particular, se estudió un circuito eléctrico formado por una resistencia, una inductancia y un diodo en serie. Siendo este último el que imprime el carácter no lineal al circuito.

El motivo principal de esta experiencia es realizar un análisis que permita estudiar los sistemas caóticos en tanto sistemas no lineales. Uno de los ejemplos más simples que describen este tipo de sistemas es el fenómeno de bifurcación de doble período que antecede al régimen caótico.

Este fenómeno radica en que si se aplica una señal de período 1 al sistema en cuestión y, posteriormente, se cambia algún parámetro del sistema, el período de la señal de salida se bifurca a medida que dicho parámetro varía. En otras palabras el período se desdobra (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...,  $2^n$ ) infinitamente conduciendo a una señal con período infinito o al caos siendo esto una clara manifestación de la no linealidad<sup>1-4</sup>.

Cada una de estas bifurcaciones se alcanza para determinados valores del parámetro que está siendo modificado. La cantidad necesaria en que

tiene que variarse este parámetro decrece de manera constante. Comparando valores consecutivos de estas cantidades se obtiene un valor denominado constante de Feigenbaum ( $\delta$ ):

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1} - P_n}{P_{n+2} - P_n} \quad (1)$$

donde  $P_n$  es el valor del parámetro variado y  $P_{n+1}$ ,  $P_{n+2}$  son los valores correspondientes a las dos próximas bifurcaciones<sup>5</sup>.

Este patrón se repite en todos los sistemas en los cuales el fenómeno de bifurcación se observa.

En el caso, particular, de un circuito eléctrico los  $P_n$  pueden representar tanto a la frecuencia como a la amplitud de la señal entrante según se mantengan una u otra constante.

Se dice que esta constante es universal ya que para cualquier sistema bajo este proceso el valor es el mismo cuando los períodos aumentan infinitamente:

$$\delta = 4,6692\dots$$

El objetivo del trabajo consistió en calcular esta constante analizando las distintas señales de salida según los parámetros variados. Para esto fue necesario realizar un análisis de Fourier para cada una de las señales utilizadas de modo tal de poder apreciar las transiciones acaecidas tanto en los diagramas de fase como en los correspondientes a la señal en función del tiempo.

## Arreglo Experimental

Se utilizó el circuito R-L-Diodo que se muestra en la figura 1. Los parámetros utilizados fueron  $R = (98,4 \pm 0,1)\Omega$ ,  $L = (1.42 \pm 0.01)\text{mH}$  y un diodo modelo IN4007. Se midió la tensión de salida sobre la resistencia y la tensión de entrada en la fuente mediante un osciloscopio Tektronix TDS340A. Se realizaron dos series de mediciones. Con la intención de observar desdoblamiento del período a causa de la variación de distintos parámetros, se varió, en primer lugar, la frecuencia de la fuente manteniendo la amplitud constante en  $V_{pp} = (3.000 \pm 0.001)\text{V}$  y, en segundo lugar, la amplitud de la señal de entrada manteniendo la frecuencia fija en  $f = (229337.10 \pm$

0.01)Hz. Esta última es la frecuencia de resonancia, que se buscó para maximizar la señal medida en la resistencia.

Los rangos de variación de la amplitud y frecuencia de la amplitud entrante fueron de (1.800 a 3.200) V y (180 a 407)kHz respectivamente.

Se observaron en el osciloscopio diagramas  $V_r$  vs  $V_f$  adquiriéndose únicamente los datos correspondientes a cambios en los diagramas de fase como consecuencia del desdoblamiento del período de la señal.

Para determinar las frecuencias presentes se le realizaron espectros de Fourier a la señal  $V_r(t)$ . Se determinaron la frecuencia o la amplitud (según corresponda) en las cuales se produjeron las transiciones de las órbitas correspondientes a los desdoblamientos de período (los  $P_n$  en la ec. 1) con el fin de calcular la constante de Feigenbaum

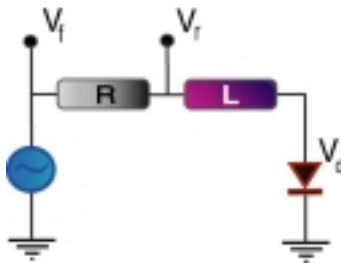


Fig 1- Diagrama del circuito utilizado.

## Análisis y Resultados

Al variar la amplitud de la señal de entrada se notaron 4 bifurcaciones de los períodos. En cada uno de estos casos se realizó una transformada rápida de Fourier (FFT). Se observó la presencia de sub-armónicos ( $f_0/n$ ) y de ultra-armónicos ( $mf_0/n$ , o sea, armónicos de los sub-armónicos) con  $n$  y  $m$  números naturales <sup>6</sup>. Se analizan a continuación las primeras 4 bifurcaciones. En todos los casos se realizó una transformada de la señal entrante para verificar la presencia de la frecuencia fundamental generada por la fuente.

A continuación se muestran gráficos en los cuales pueden verse la señal de salida en función del tiempo ( $V_r(t)$ ), su espectro de Fourier y el diagrama de fase  $V_r$  vs.  $V_f$ .

Además se observa que la periodicidad de la señal de salida se corresponde con el número de “loops” que se forman en los diagramas de fase <sup>7</sup>.

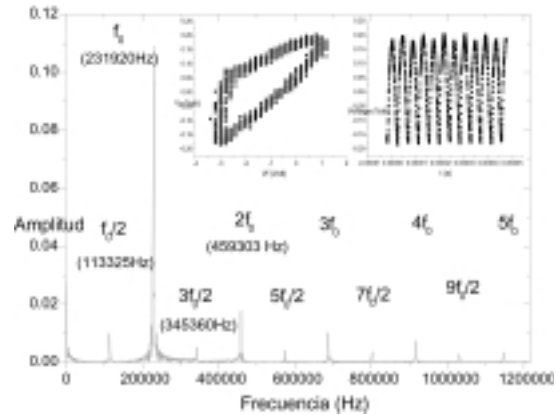


Fig 2- Espectro de frecuencias para un periodo doble. La amplitud de entrada es (2.030 ± 0.001)V.

Puede observarse en la figura 2 claramente la frecuencia fundamental, su primer sub-armónico y los armónicos de ambas que responden a  $mf_0/n$  con  $m = 1, 2, 3, \dots$  y  $n = 1, 2$ .

En la figura 3, 4 y 5 se observan períodos 4, 8 y 16 veces mayor al de la señal de entrada respectivamente.

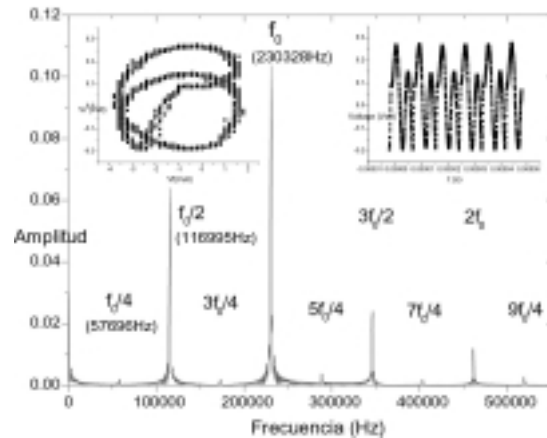


Fig 3 – Espectro de frecuencias para un periodo cuádruple. Tensión de entrada (2.530 ± 0.001)V.

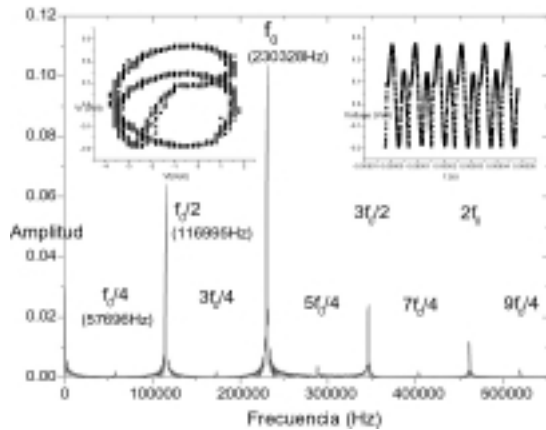


Fig 4 – Espectro de frecuencias para un periodo óctuple. Tensión de entrada (2.670 ± 0.001)V.

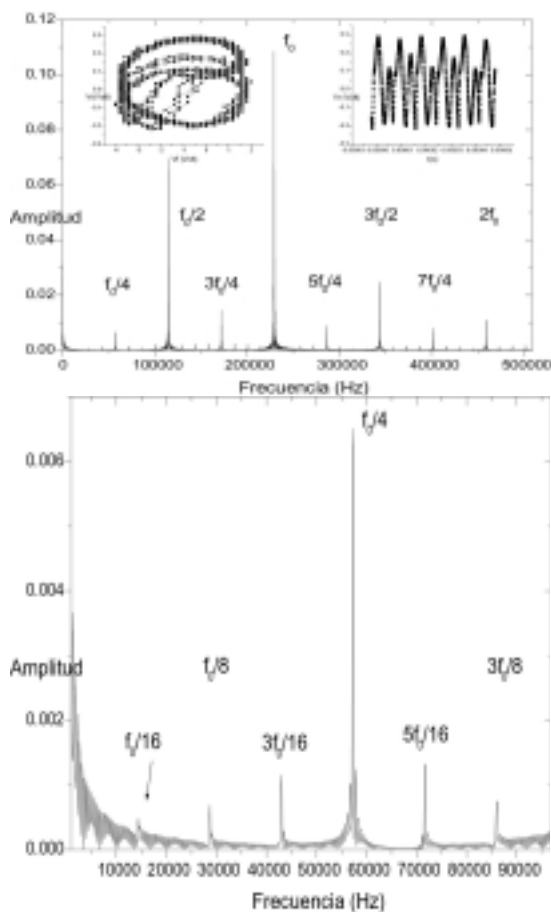


Fig 5 – Arriba: Espectro de frecuencias para un periodo 16 veces mayor al de la señal de entrada. Tensión de entrada (2.700 ± 0.001)V. Abajo: ampliación.

Al variarse la frecuencia se adquirieron datos similares. En estos casos se observó claramente sólo hasta un periodo óctuple.

A partir de estas mediciones fue posible calcular, en el caso de variación de amplitudes, dos valores

para la constante de Feigenbaum y uno solo al variar frecuencia.

Se confeccionó una tabla para cada caso y se calculó el valor de  $\delta$  según la ecuación 1.

Amplitud de entrada (V)	periodo
2.030 ± 0,001	1-2
2.530 ± 0,001	2-4
2.760 ± 0,001	4-8
2.700 ± 0,001	8-16

Tabla 1- Datos a partir de los cuales fue calculado  $\delta$ .

Los valores de delta calculados a partir de los datos de la tabla I son:

$$\delta = 3.57 \pm 0.04 \quad (\text{períodos 2 a 8})$$

$$\delta = 4.7 \pm 0.2 \quad (\text{períodos 4 a 16})$$

Frecuencia de entrada (kHz)	periodo
181.5 ± 0.2	1-2
208.0 ± 0.2	2-4
214.3 ± 0.2	4-8

Tabla 2- Datos a partir de los cuales fue calculado  $\delta$ .

El valor de delta calculado a partir de los datos de la tabla 2 es:

$$\delta = 4.19 \pm 0.19$$

Tras estas bifurcaciones se esperaba obtener señales cuyos espectros estuviesen compuestos por muchos picos, simil a un espectro continuo, o espectros en los cuales ciertas frecuencias presenten mayor ensanchamiento. Esto no fue observado. Al continuar variando la señal entrante se observaron nuevamente bifurcaciones similares a las ya observadas. En otras palabras, no se observó el régimen caótico.

## Conclusiones

Se verificaron las bifurcaciones del periodo de la señal de salida para variaciones de la amplitud o de la frecuencia de la señal entrante.

Asimismo se corroboró la respuesta no lineal frente a pequeños cambios en las condiciones iniciales.

Sin embargo, no pudo observarse la transición al caos que se esperaba para este tipo de circuito. Como posibles causas se pueden considerar, por un lado, haber permanecido fuera del rango de los

parámetros del circuito que permiten obtener soluciones caóticas; por el otro, que los intervalos en los cuales se varió tanto la amplitud como la frecuencia no fuesen lo suficientemente amplios como para alcanzar el régimen caótico.

Para experiencias futuras se sugiere realizar una simulación numérica que permita verificar las posibles causas mencionadas como así también confrontar las mediciones realizadas con un modelo matemático.

Con respecto a los valores calculados para la constante de Feigenbaum se considera que la discrepancia con el valor teórico 4.6692... se debe a que sólo se contemplaron las primeras bifurcaciones y no casos con  $n$  grande.

## Referencias

<sup>1</sup>T. Matsumoto, L.O. Chua, S. Tanaka, *Physical Review A*. **30**, 1155 (1984).

<sup>2</sup>P.Linsay, *Physical Review Letters*. **47**, 1349 (1981).

<sup>3</sup>J.Testa, J. Perez, C.Jeffries, *Physical Review Letters*. **48**, 714 (1982).

<sup>4</sup>A. Azzouz, M. Hasler, *IEEE*. **37** (11), (1990).

<sup>5</sup>B. Prusha, The College of Wooster, *Measuring Feigenbaum's  $\delta$  in a bifurcation electric circuit*.

<sup>6</sup>C. Greene, C. Chiang, Davidson College, *Period doubling route to chaos*.

<sup>7</sup>R. Lua, University of Minnesota, *Period-doubling in a simple diode circuit*, (2002).

<http://webusers.physics.umn.edu/~rlua/chaos/>  
<http://www.phy.davidson.edu/StuHome/chgreene/Lab%203/Diode%20Resonator.pdf>

# Period-doubling in a Simple Diode Circuit

By Rhonald Lua  
*rlua@physics.umn.edu*

## Table of Contents

- [I. Abstract](#)
- [II. Theory](#)
- [III. Description of Experiment](#)
- [IV. Data and Analysis](#)
- [V. Computer Simulation](#)
- [VI. Conclusion](#)
- [Acknowledgments](#)
- [References](#)

## I. Abstract

The phenomena of period-doubling bifurcation and the route to chaos is observed in an electronic circuit with a diode as a source of nonlinearity. Feigenbaum's constant is estimated based on the parameters at which the first few bifurcations sets in. A Java applet is written simulating the time evolution of the voltage across the diode. The simulation also manifests period-doubling.

## II. Theory

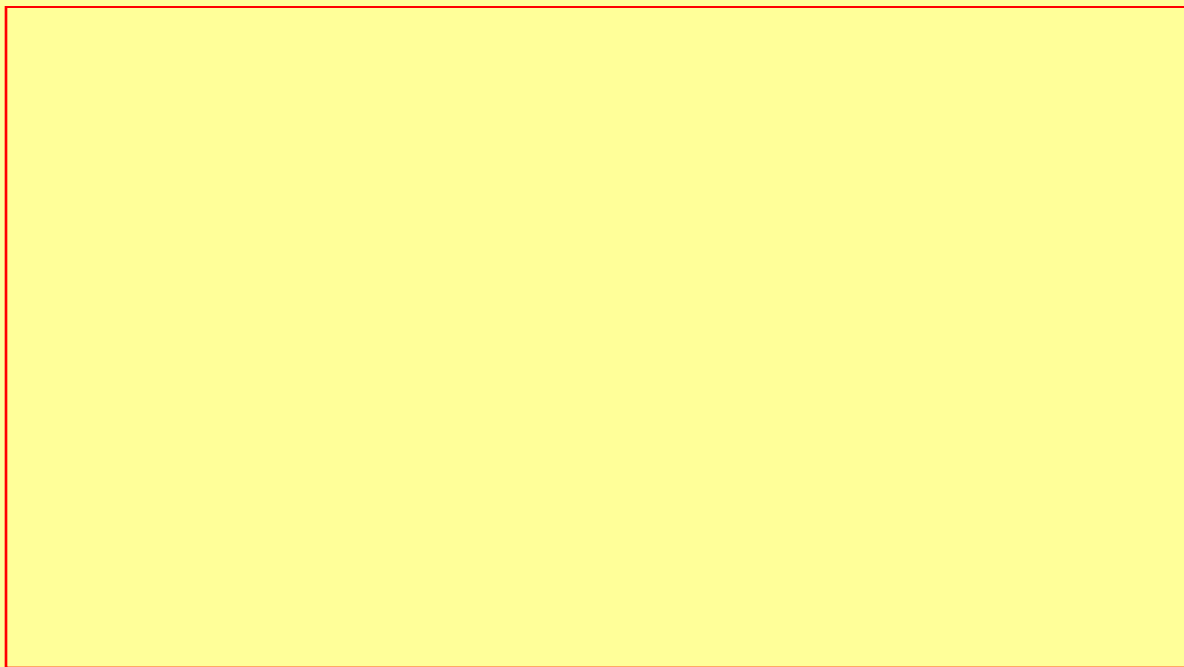
Complex behaviour such as period-doubling bifurcations and chaos are known to occur in nonlinear systems. Period-doubling implies getting a response with a period different from that of the driving force, which is a manifestation of nonlinearity.

A simple way to infuse nonlinearity into an electronic circuit is to introduce a diode (e.g. Circuit 1 below) . A diode is akin to a valve that lets charge carriers flow in only one direction. Statistical physics gives the following model for the current-voltage relationship of a diode:

$$I = I_0 (e^{qV_d/kT} - 1) \quad \text{Eq. 1}$$

(Here  $I$  is the current thru the diode,  $V_d$  is the voltage across the diode, and the rest are considered constants) That this is nonlinear is easily seen by noting that because of the exponential the current due to a sum of two voltages is not the sum of the currents due to each voltage separately. Another way to see this is to note that the exponential can be expanded as a series of increasing powers of its argument.

The experiment and the computer simulation are based on the following circuit schematic:



Circuit 1

By Kirchhoff's voltage rule (which is just the conservation of energy in another guise) the voltage across the diode in Circuit 1 is related to the current and the waveform generator voltage (i.e. the external driving force) as follows:

$$L \frac{dI}{dt} = V_0 \sin(2\pi ft) - IR - V_d$$

Eq. 2

Here  $V_0$  is the amplitude (in Volts) and  $f$  is the frequency (in Hertz) of the waveform generator. These two are the parameters we shall vary.

Even though we have a model that furnishes another relationship between  $V_d$  and  $I$  (Eq.1), we shall not use it. Instead, we shall model the diode as a device with a piecewise linear capacitance ([Ref. 2](#)), which is somewhat simpler.

As a parameter of a nonlinear system is varied (such as the generator amplitude or frequency), it is possible to witness a period-doubling bifurcation. If the  $n$ th period-doubling occurs at  $A_n$ , then there is good reason to assert that,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n-1} - A_{n-2}}{A_n - A_{n-1}} = 4.669201609\dots$$

Eq. 3

This number is named after M. Feigenbaum who, in 1978, noted that the ratios of parameter distance between two successive period-doublings approach a universal constant as the periods increase to infinity ([Ref 3](#)). We shall estimate this limit from the first few ratios in the sequence.

### III. Description of Experiment

The circuit schematic is realized as shown in Fig. 1. The diode ( IN2071) is the small black object at

right, the inductor ( $L=2\text{mH}$ ) is the large gray object in the middle, and the resistor (22 Ohms) is the very small object at left. These three components are soldered together in a series.

The entire setup is shown in Fig. 2 together with the measuring device (A Tektronix 2245A 100MHz Oscilloscope) and the waveform generator (An HP 33120A 15MHz Function/Arbitrary Waveform Generator) on top of the oscilloscope.



Fig. 1. Circuit.



Fig. 2. Setup.

There are two ways to view the behaviour of the circuit with the oscilloscope. The first way is to have the diode voltage plotted vs. time (i.e. as a time series). The second way is to have the the diode voltage plotted in one axis and the waveform driving voltage in the other axis (similar to impact map), which we shall call X-Y. The bifurcations are more obvious in the second method, in which the number of periods is revealed by the number of loops. The time series is also used to verify the picture we get from the X-Y. As a time series, the number of periods is revealed by the number of distinct peaks.

As we vary the frequency starting at around 72kHz (which does not seem to be far from the resonant frequency) with the amplitude fixed at around 4Vpp, we encounter the sequence of bifurcations shown in the following X-Y pictures:



Fig. 3. Period 1.



Fig. 4. Period 2.



Fig. 5. Period 4.



Fig. 6. Period 8.



Fig. 7. Period 16.

Increasing the frequency after period 8 or period 16, noise or chaos seem to take over, as the following

pictures show:



Fig. 8. Chaos(?)



Fig. 9. Chaos(?)

Other periods (3,5,etc.) are also encountered (Click [HERE](#)). The time series for periods 1 and 2 are as follows:

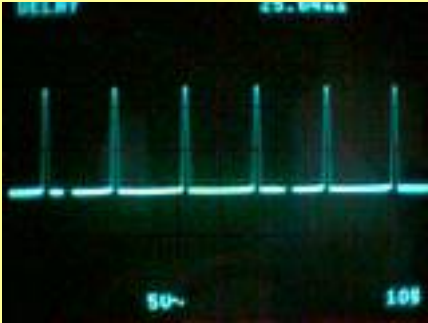


Fig. 10. Period 1 (time series)

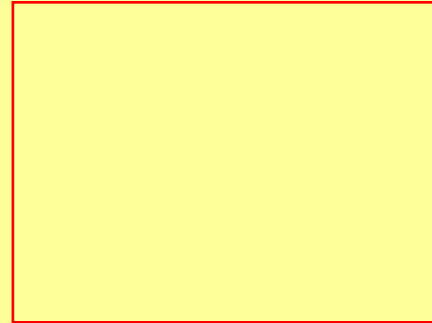


Fig. 11. Period 2 (time series). Note the two distinct peaks.

Similar results are seen with the frequency fixed and the amplitude varied.

## IV. Data and Analysis

The following tables show the parameters at which period-doubling bifurcations occur:

Period	Amplitude (Vpp) FIXED	Frequency (kHz)	Feigenbaum estimate
1	4.00	-----	---
2	4.00	73.81	---
4	4.00	88.26	---
8	4.00	92.13	3.7 (+/- 0.1)
16	4.00	93.03	4.3

Table 1.

Period	Amplitude (Vpp)	Frequency (kHz) FIXED	Feigenbaum estimate
1	----	72	---
2	4.11	72	---



4	5.08	72	---
8	5.30	72	4.4
16	5.34	72	5.5

Table 2.

( The frequencies and voltages are uncertain in the last digit)

The Feigenbaum estimates were calculated as follows:  $(88.26 - 73.81)/(92.13 - 88.26) = 3.7$  (Table 1, 4th column), etc. The calculated values, which correspond to the first few terms of the sequence of Eq. 3, are already quite close to the accepted limit of 4.669... Unfortunately, we can no longer get to larger  $n$ , for noise or chaos takes over after 8 or 16 periods. Even if it were possible to view much higher periods, the uncertainty in the calculated values for these higher periods would be large (rendering the result useless) because small differences are being used in the ratio.

## V. Computer Simulation

Click [here](#) to view the Java applet.

## VI. Conclusion

Period-doubling is observed in a simple circuit containing a diode. The experiment gave a rough estimate of Feigenbaum's constant based on the first few bifurcations. The Java applet simulated the time evolution of the diode voltage based on Eq. 2 and a piecewise linear capacitance model for the diode. This simulation manifested period-doubling.

By measuring the peaks in the time series as the circuit goes thru the bifurcation cascade, it is possible to construct a bifurcation diagram.

## Acknowledgments

I wish to thank Kurt Wick for permission to access the MXP laboratory (primarily for the waveform generator and oscilloscope).

The pictures were taken with a Lego PC Camera (hence the resolution).

## References

- [1] [Measuring Feigenbaum's in a Bifurcating Electric Circuit](#)
- [2] <http://library.wolfram.com/webMathematica/MSP/Explore/Engineering/Circuit>
- [3] K.I. Alligood, T.D. Sauer and J.A. Yorke "Chaos: an introduction to dynamical systems", (Springer, New York, 1996).

[Back to top](#)

---

*e-mail: [rlua@physics.umn.edu](mailto:rlua@physics.umn.edu)*

*Names and trademarks belong to their owners.*

*The views and opinions expressed in this page are strictly those of the page author. The contents of this*

*page have not been reviewed or approved by the University of Minnesota.*