

# Levitación Magnética de un anillo

## Anillo de Thompson

A. Villanueva y F. Suarez Ornani

Departamento de Física UBA- 1998

Se estudió la levitación de un anillo de aluminio producida por la fuerza de Lorentz (anillo de Thomson). El anillo se halla en presencia de un campo magnético externo; la variación temporal del flujo magnético a través del anillo origina en el mismo una corriente. Como consecuencia de la misma el anillo sufre una fuerza neta. Demostramos que la fuerza se debe exclusivamente a la diferencia de fase que existe entre el campo magnético radial y el longitudinal. Derivamos una expresión teórica para la fuerza la cual fue verificada experimentalmente.

### I. Introducción

Nuestro dispositivo consiste en un solenoide con un núcleo de hierro sobre el cual se engarza el anillo como se indica en la Figura 1. El solenoide está alimentado con la tensión de línea, la frecuencia es de  $50\text{Hz}$ . El eje del solenoide se coloca paralelamente al campo gravitatorio; de esta forma la fuerza de Lorentz que actúa sobre el anillo está orientada en sentido opuesto al mismo; conociendo la masa del anillo se puede obtener el valor de dicha fuerza.

Dicha fuerza proviene de la interacción del campo magnético que genera el solenoide, con la corriente inducida por el mismo en el anillo. Esta explicación es sin embargo insuficiente para entender el fenómeno en su totalidad. Se puede demostrar matemáticamente que si el campo magnético longitudinal ( $B_z$ ) y el transversal ( $B_r$ ) están en fase, entonces la fuerza de Lorentz sobre el anillo se promedia a cero en un período de oscilación de la tensión excitadora. Nos propusimos estudiar el fenómeno desde un punto de vista netamente experimental, sin tener en cuenta cuales son las causas de este desfase.

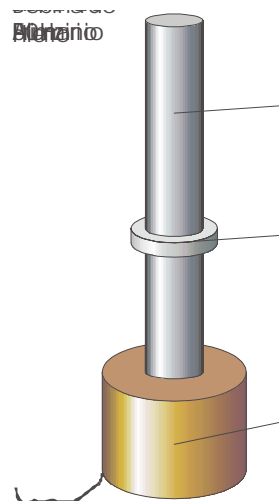


Figura 1. Esquema del montaje del aparato.

En el siguiente trabajo hacemos primeramente una descripción de la experiencia con sus resultados a continuación, y luego se proponen dos métodos de estudio. El primer método (Apéndice A. Método de campo total) describe el tratamiento midiendo el campo total generado por la barra y por el anillo. En el segundo, en cambio, se realizan la mayor cantidad de mediciones sobre la barra solamente y luego se mide cual es la variación con una sola medición sobre el anillo, minimizando así el error (Apéndice B. Método de campo externo).

### II. Descripción del arreglo experimental

El sistema es bastante sencillo y consta de un bobinado primario, una barra de hierro y un anillo de aluminio.

El bobinado es un arrollamiento de cobre de  $5000$  vueltas de alambre de  $0,3\text{mm}$  de diámetro, montado

sobre un carrete de plástico de diámetro interior de 20mm y exterior 60mm con una altura de 52mm. En su interior se coloca la barra de hierro de diámetro 19mm (fijada con cinta en torno a ella para evitar el movimiento) y altura 298mm. El anillo se enhebra en esta barra de forma que pueda deslizar libremente a lo largo de su longitud, y posee un diámetro interior de 19,5mm, exterior 25mm y altura 5mm. Alternativamente se utilizó una barra de ferrite con temperatura de Curie del orden de los 250°C (lejos de la temperatura de trabajo) de un diámetro de 18mm y un largo de 197mm. Para la medición de la f.e.m. inducida se utilizó un pequeño bobinado de 6 vueltas de un alambre de cobre más fino que el anterior, ajustado sobre una cinta plástica que desliza en el núcleo de hierro. Se utilizó un osciloscopio de 2 canales de forma que se pudiese monitorear las diferencias de fase respecto la línea y de dos posiciones relativas de la barra. Además se utilizó un multímetro digital para la obtención de la corriente que circulaba por el primario.

### III. Descripción de la experiencia

Primeramente se procedió a la medición sistemática de la f.e.m. inducida respecto de la posición relativa al bobinado primario. La medición se realizó tanto para el módulo como para la fase (ver Figura 2, trazo azul).

Luego, a fin de poder calcular la fuerza teóricamente, colocamos el anillo en distintas posiciones y medimos la f.e.m. en las cercanías (Ver Figura 2 trazo rojo).

Las posiciones que utilizamos no son arbitrarias sino que corresponde a la posición del anillo con un peso extra. Para que el peso extra no perturbase el equilibrio mecánico del sistema, fue agregado en forma de anillos cortados de forma que no fuesen circuitos cerrados. Al no estar cerrados, no se genera una corriente que modifique el campo original. Esto fue probado experimentalmente con un anillo cortado sin ser observada levitación alguna. Además, las modificaciones que presenta por corrientes parásitas son ignorables, ya que no han podido ser medida ninguna diferencia referente a la f.e.m. (amplitud y fase).

Destacamos que el equilibrio se obtiene soltando el anillo desde una posición y dejando que el sistema evolucione hasta un estado estable. El movimiento descrito es el de una oscilación amortiguada.

A continuación se cambió el núcleo de hierro por uno de ferrite y se midió tanto el desfasaje en los extremos como la capacidad de hacer flotar a un anillo.

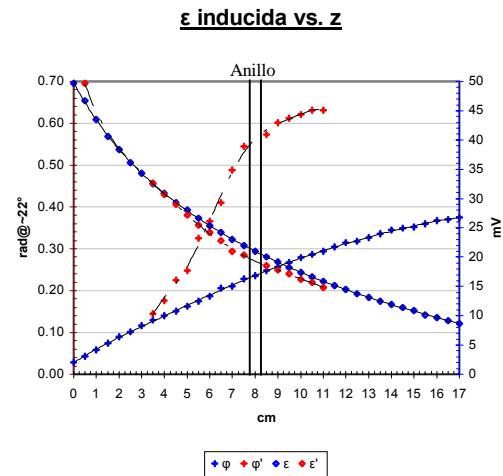
### IV. Resultados experimentales

Para la f.e.m. inducida respecto de la posición en el sistema sin el anillo (teniendo en cuenta su desfasaje respecto de la tensión de línea) obtuvimos los valores graficados en la Figura 2, en trazos azules.

El desfasaje se obtuvo en la forma usual, esto es, graficando en un osciloscopio las figuras de Lissajous correspondientes a la tensión primaria en el eje x y la secundaria en el eje y (como tensión secundaria nos referimos a la tensión que se midió en la bobina de prueba), midiendo el ancho máximo de la elipse ( $V_{m\acute{a}x}$ ) y usando:

$$\delta = \arccos\left(\frac{V_{m\acute{a}x}}{2V_{lin}}\right)$$

El valor de  $\varepsilon_0$  se calcula dividiendo la f.e.m. inducida en la bobina de 6 espiras (medida con el valor pico a pico) por 12.



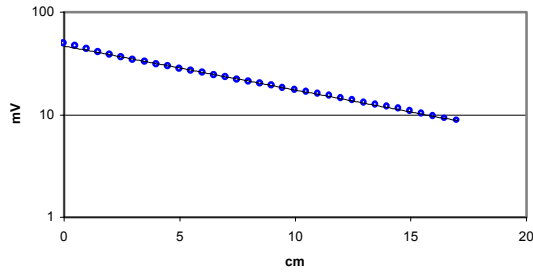
**Figura 2.** Fuerza electromotriz con su desfasaje respecto de la tensión de entrada en función de la posición. Están graficados los valores tanto sin el anillo como con el anillo 0 (primados).

Analizando la dependencia funcional de la f.e.m. respecto de la posición observamos que los datos ajustan en muy buena forma a una caída exponencial, como puede observarse en la Figura 3. Este tipo de comportamiento se observa según una fórmula del tipo

$$\varepsilon_0 = Ae^{-Bx}$$

con  $B > 0$ .

### $\epsilon$ inducida con la barra de hierro



**Figura 3.** Dependencia funcional de  $\epsilon_0$  con la distancia. El coeficiente de correlación es de  $R^2 = 0,9986$ . Nótese que la escala vertical es logarítmica.

Las posiciones de equilibrio para el anillo con distintos pesos fueron numeradas con la denominación 0, 1 y 2, siendo su peso, altura de equilibrio y corriente que circula por el primario:

Anillo	Peso (gr)	$Z_{eq}$ (mm)	$I_{eq}$ (mA)
0	3,2	80	283
1	7,2	48	286
2	11,2	32	289

Los datos medidos de la f.e.m. en entornos de las posiciones de equilibrio del anillo fueron similares a la Figura 2 (trazo rojo), donde se aprecian los valores medidos para el anillo 0. Obsérvese que se han tomado una serie de mediciones en posiciones tanto arriba como abajo del anillo. En el gráfico se compara como la deformación se produce tanto en la fase como en la amplitud de la f.e.m., siendo más importante en la primera. Notamos que la pendiente de la función que describe el desfase presenta un cambio marcado cerca del anillo (ver más adelante en el cálculo de la fuerza), no así el valor de la f.e.m. o su pendiente, que son funciones suaves y que presentan una variación no muy marcada respecto de la medición sin anillo.

La resistencia del anillo fue calculada utilizando las dimensiones del mismo y el valor de la resistividad del aluminio ( $2,90 \cdot 10^{-8} \Omega m$ ). Para nuestros valores de sección cuadrada (5,5mm por 5mm) y 9,75mm de radio la resistencia del anillo es de aproximadamente  $7,49 \cdot 10^{-5} \Omega$ .

Como una primera aproximación, usamos los valores del sistema sin anillo, graficados en la Figura 2 con trazo azul, junto con la ecuación

$$\langle F \rangle_z = \frac{\epsilon_0^2}{2\omega R} \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

para estimar el valor numérico de la fuerza de Lorentz sobre el anillo. Esta aproximación resultó ser

insatisfactoria ya que en todos los casos la diferencia entre ésta y el peso del anillo, era superior al 40% por defecto (el error del valor calculado es del 17%). Con miras a resolver este inconveniente realizamos las mediciones que se describieron anteriormente. Los datos así obtenidos resultaron dan una diferencia menor cuando insertados en la ecuación 6. La diferencia rondó en torno al 36% respecto del peso del anillo por exceso (con el mismo error de cálculo de 17%).

Observando la Figura 2 vemos que  $\theta(z)$  manifiesta una variación muy apreciable entre puntos inmediatamente por debajo del anillo y puntos inmediatamente por encima. Esto se puede entender si tenemos en cuenta que el anillo representa una discontinuidad de las propiedades del medio (tomando al anillo como una espira de altura  $dz$ ). Si bien no existe una discontinuidad real de las magnitudes físicas en cuestión (ya que el anillo si tiene una altura y esta es no despreciable), existe una variación muy fuerte de las mismas. Para que nuestras mediciones nos pudiesen aportar información más precisa, necesitaríamos considerar una mayor cantidad de puntos más próximos al anillo e incluso en la misma posición que éste, lo cual se dificulta en la práctica debido a la posición física del mismo.

Para resolver este último aspecto, se desarrolló el modelo equivalente detallado en el Apéndice B, al cual se arriba considerando los campos generados por el solenoide sobre el núcleo solamente y midiendo cual es la variación que a estos le produce el anillo. Arribamos a:

$$\langle F \rangle_z = \frac{\epsilon_0^2}{2\omega R} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \cos^2 \delta - \frac{\partial \epsilon_0}{\partial z} \frac{\sin \delta \cos \delta}{\epsilon_0} \right)$$

Con este formalismo y los datos experimentales se pudo calcular la fuerza de Lorentz sobre el anillo en forma teórica con un error por debajo del 15% con respecto al peso del anillo (el cálculo fue hecho con error de 15%).

Anillo	Balanza	Método 1	Método 2	Método 3
0	31,4±0,9	18,7±3	42±7	36±5
1	70,6±0,9	43±10	91±15	83±10
2	110±0,9	71±10	154±25	125±20

**Tabla 1.** Resumen de valores medidos y calculados según los 3 métodos. Las unidades están en mN. Los errores provienen de la usual derivación de la propagación de los datos experimentales.

Analizando los valores con su error observamos que para el método 1 los cálculos son completamente erróneos y, como ya sabemos, se debe a no tener en cuenta los efectos de la autoinductancia de la bobina.

na, esto es, de cómo modifica el anillo al campo externo.

Para el método 2, sin embargo, los resultados son más cercanos, pero aún fuera del margen de error. Atribuimos esta diferencia a que la obtención de la derivada de  $\phi$  respecto de la posición para el caso de los campos con el anillo, presentan un cambio brusco en la pendiente que no permite la obtención de dicho valor con precisión. Si bien la forma de mejorar la derivada numérica es la obtención de mayor cantidad de puntos cercanos a la coordenada en cuestión, el tamaño del anillo nos limitaba severamente a un espaciado de 5mm (altura del mismo) en la zona de interés.

Según las predicciones hechas, el tercer método es el más preciso, pero hasta aquí estamos alejados del valor medido mecánicamente. Observamos que todos los cálculos son mayores que estos. Dicho problema puede deberse a algún tipo de mecanismo no tenido en cuenta (como ser los efectos disipativos).

Además de las mediciones en la barra de hierro se realizó una prueba sobre una barra de ferrite ( $\mu \approx 1000$  y  $T_c \approx 260^\circ\text{C}$ ) para medir si había un desfase neto, pero en la longitud total no se observó diferencia alguna (ver Figura 5 y Apéndice C).

El desfase producido entre los campos magnéticos longitudinal y transversal puede entenderse si consideramos que por la presencia de medios materiales el campo total recibe una contribución de la magnetización inducida en el medio. Independientemente de las propiedades del medio, la magnetización, que es en definitiva fuente de campo magnético, no se produce en forma instantánea, con lo cual, el campo total tendrá una contribución, que es la del campo generado por la corriente del primario, y la contribución de la magnetización que, como no es instantánea, no estará en fase con la primera. Esta es la razón fundamental por la cual, en ausencia de medios materiales se puede proponer una solución tipo la propuesta en el apéndice VII, ec. 14, mientras que cuando no es así el estado del sistema nunca puede considerarse cuasiestacionario y se arriba a una ecuación de ondas.

## V. Apéndice A. Método de campo total

Consideremos la expresión para la fuerza de Lorentz:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad 1$$

que es la fuerza que actúa sobre el elemento de longitud orientado ( $d\vec{l}$ ) a causa de la corriente  $I$  que circula por el mismo (aquí estamos aproximando

que el anillo es una espira sin volumen). Esta es la corriente total inducida y viene dada por:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}; \varepsilon = -\frac{\partial\phi}{\partial t} \quad 2$$

donde  $R$  es la resistencia del anillo. Escribiendo:

$$\phi = \iint_{\text{Anillo}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad 3$$

$$\phi = \int_0^a \int_0^{2\pi} r dr d\theta B_z(r, z) e^{-i\omega t} = \phi(z) e^{-i\omega t}$$

donde  $a$  es el radio del anillo y  $\omega$  la frecuencia angular de la tensión de línea surge, reemplazando en 1:

$$d(F)_z = -\frac{i\omega\phi(z)}{R} B_r(z, a) e^{2i\omega t} z dl \quad 4$$

con:

$$dl = |dl|$$

donde se usó el hecho de que el campo magnético radial y el longitudinal tienen la misma dependencia armónica temporal. Claramente esta última expresión tiene promedio temporal nulo.

Supongamos empero, que existe un desfase que depende de  $z$ , entre el campo magnético radial y el longitudinal. De manera que, reemplazando 3 por:

$$\phi = \phi(z) e^{-i(\omega t - \theta(z))} \quad 5$$

Bajo estas condiciones, y suponiendo la inexistencia de monopolos magnéticos ( $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ), el campo magnético transversal queda:

$$B_r = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

Jugando un poco con las ecuaciones se llega a que el valor medio de la fuerza en la dirección longitudinal es:

$$\langle F \rangle_z = \frac{\varepsilon_0^2}{2\omega R} \frac{\partial\theta}{\partial z} \quad 6$$

donde:

$$\varepsilon_0 = \phi(z)\omega \quad 7$$

Esta última formulación se ha hecho en términos de los campos totales. El objeto de este modelo es dar un indicio del origen de la fuerza. Sin embargo, expresiones cuantitativas para  $\theta(z)$  y  $\phi(z)$  están fuera del alcance de la misma. Una formulación completa implicaría la resolución de las ecuaciones de Maxwell en presencia de medios materiales con condiciones de contorno apropiadas; éste no es el objetivo del trabajo.

## VI. Apéndice B. Método de campo externo

Un modelo equivalente al anterior en lo que respecta a los aspectos teóricos, pero que presenta ventajas a la hora de medir experimentalmente el desfase que hay entre los campos  $B_r$  y  $B_z$ , es el siguiente: hacemos una formulación en términos de los campos externos. Denotaremos con  $\hat{\phi}$  las cantidades en presencia del anillo y por omisión las cantidades en ausencia del mismo. El flujo total del campo magnético a través del anillo viene dado por:

$$\hat{\phi}(z, t) = \phi(z, t) + LI \quad 8$$

donde  $L$  es la auto-inductancia del anillo en presencia de la barra de hierro, y no en el vacío. Tomando la derivada temporal parcial de 8 y usando:

$$\mathcal{E} = -RI$$

surge:

$$-\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} = \mathcal{E} = L \frac{dI}{dt} + RI \quad 9$$

Usando la ecuación 7 para los valores con el anillo, la 8 y la 6, se llega a:

$$\hat{\theta}(z) = \theta(z) + \delta$$

$$\mathcal{E}_0(z) = \varepsilon_0(z) \cos \delta.$$

Usando además, que:

$$\frac{\partial \hat{\phi}(z, t)}{\partial z} = \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z}$$

a  $z$  fija, se obtiene

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z}}{\varepsilon_0} \text{tg} \delta$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z} \cos \delta + \varepsilon_0 \frac{\partial \theta}{\partial z} \text{sen} \delta.$$

Finalmente, haciendo uso propicio de estas ecuaciones, se obtiene, junto con 6 (donde se sobreentiende que las cantidades que en ésta aparecen son las cantidades en presencia del anillo):

$$\langle F \rangle_z = \frac{\varepsilon_0^2}{2\omega R} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \cos^2 \delta - \frac{\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z}}{\varepsilon_0} \text{sen} \delta \cos \delta \right) \quad 10$$

que permite expresar la fuerza en término de las cantidades “en ausencia del anillo”, lo que resuelve nuestro problema de medición.

La cantidad  $\delta$  se puede estimar mediante la relación

$$\delta = \omega \Delta t \quad 11$$

donde la diferencia de tiempos es la relativa a la fase de la f.e.m. inducida con y sin el anillo.

## VII. Apéndice C. Razones físicas

Intentaremos ahora, dar argumentos que permitan justificar la suposición de que el campo magnético radial y el longitudinal están desfasados.

Consideremos el caso de una espira circular alimentada por una corriente

$$I = I_0 e^{i\omega t} \quad 12$$

Calculemos el campo magnético en todo punto del espacio. Las leyes diferenciales que rigen el fenómeno son las ecuaciones de Maxwell en el vacío, que para el caso del aire es una buena aproximación. Dado que el cociente:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \approx \frac{50\text{Hz}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/seg}} \approx 1,6 \cdot 10^{-7} \text{ } \mu\text{m} \quad 13$$

es válido hacer la aproximación cuasiestacionaria, proponemos entonces la forma funcional

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}) e^{i\omega t} \quad 14$$

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

La ecuación de Maxwell que liga el rotor del campo magnético queda

$$\nabla \times \vec{B} = i \frac{\omega}{c} \vec{E}(\vec{r}) + \frac{4\pi}{c} J(\vec{r})$$

habiendo supuesto que la dependencia temporal de la densidad de corriente es armónica. Despreciando el término lineal en  $\omega/c$  y teniendo en cuenta que solo nos interesa calcular el campo en puntos externos a la espira misma:

$$\nabla \times \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \nabla \Phi$$

Haciendo uso de que la divergencia del campo magnético es 0, surge

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

La solución de esta ecuación existe y está dada por

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} a_l r^l P_l(\cos \theta) \quad 15$$

donde hicimos uso explícito de la simetría asimutal del problema e impusimos además que el campo sea acotado en el origen. Los coeficientes se pueden encontrar fácilmente por el método de prolongación analítica desarrollando el potencial sobre el eje de simetría de la configuración en serie de potencias y comparando los coeficientes. Con la dependencia funcional 15 resulta evidente que la componente transversal y longitudinal del campo magnético no van a estar desfasadas. El caso de un solenoide finito puede ser tratado de la misma forma usando el principio de superposición y las conclusiones anteriores siguen siendo válidas.

Los resultados anteriores son una evidencia muy contundente; el desfase de los campos parece estar ligado indefectiblemente con la presencia de medios

materiales. En el siguiente análisis trataremos de demostrar que es así.

Las ecuaciones de Maxwell en presencia de medios materiales son

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}_i$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi \rho_i$$

y las usuales para el rotor del campo eléctrico y la divergencia del campo magnético. Si suponemos además las relaciones constitutivas para medios lineales, isotrópicos y homogéneos

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{E} = \varepsilon \vec{D}$$

se puede llegar con un poco de álgebra a demostrar que en la región de interés donde no hay corrientes

$$\nabla^2 \vec{D} = \frac{\mu}{c^2 \varepsilon} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{\mu}{c^2 \varepsilon} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Tomemos la ecuación para el vector inducción magnética. Si hacemos uso explícito de la simetría asimutal, para una componente arbitraria del vector  $\vec{H}$ , la ecuación queda

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial z^2} = \frac{\mu}{c^2 \varepsilon} \frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2}.$$

Proponemos una solución de la forma

$$H_i = R(r)Z(z)T(t)$$

y sin entrar en demasiado cuenterío:

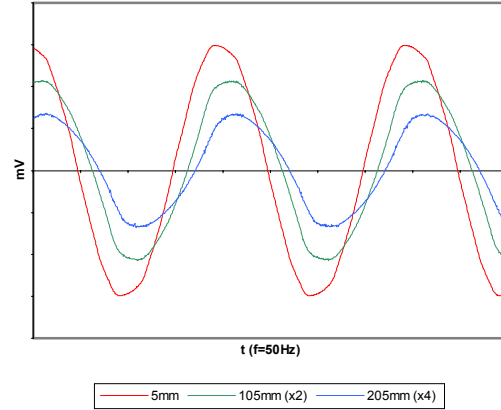
$$T(t) = ae^{i\sqrt{\frac{c^2 \varepsilon \lambda}{\mu}} t} + be^{-i\sqrt{\frac{c^2 \varepsilon \lambda}{\mu}} t}$$

donde  $\lambda$  es una constante de separación de la ecuación diferencial. A su vez:

$$Z(z) = ce^{i\sqrt{\lambda - \gamma} z} + de^{-i\sqrt{\lambda - \gamma} z}$$

donde  $\gamma$  es otra constante de separación. Los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ , son, en general, funciones de  $\lambda$  y  $\gamma$  y una solución completa involucra integración sobre estas variables.

### Deformación de la onda



**Figura 4.** Deformación de la f.e.m. medida en distintas posiciones de la barra desde la bobina primaria. Las diferencias de fase no son las observadas.

Elegiendo sin embargo las constantes adecuadamente, fácilmente se ve que:

$$Z(z)T(t) = O(\lambda, \gamma) e^{i\left[\omega t - \left(\frac{\mu}{c^2 \varepsilon} \omega^2 - \gamma\right) z\right]}. \quad 16$$

Pero este producto es la forma funcional de la solución para una componente arbitraria del campo  $\vec{H}$ . Vale decir que, para las otras componentes, las constantes de separación serán diferentes. Si bien esto no constituye una demostración formal, se ve claramente de la ecuación 16 que la misma contempla la situación en que la componente radial y longitudinal del campo  $\vec{H}$ , y con ellas las del campo  $\vec{B}$ , puedan estar desfasadas y que este desfase dependa de la posición.

Notemos que la ecuación 16 describe una amplia variedad de fenómenos. Por ejemplo, si no restringimos las variables  $\lambda$  y  $\gamma$  al dominio real, entonces una posible solución sería una oscilación modulada por una exponencial decreciente en  $z$ . Esto está en concordancia con el hecho experimental de que la tensión tiene un valor decreciente a medida que uno se aleja del centro del solenoide. Recordemos que el módulo de la tensión que medimos está directamente vinculado al módulo del campo magnético mediante la ley de Faraday. Por otro lado si admitiéramos las relaciones no locales en el tiempo

$$\begin{aligned} \mu &= \mu(\omega) \\ \varepsilon &= \varepsilon(\omega) \end{aligned}, \quad 17$$

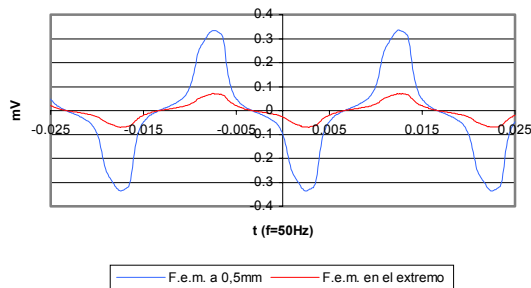
entonces la dependencia temporal de la solución deja de ser sinusoidal, cuando se realiza la superposición de todas las componentes infinitesimales que contribuyen a la solución completa. Esto vuelve a estar en estrecha relación con las evidencias experimentales. Vemos (ver Figura 5 y Figura 4) que en

el caso del ferrite, la forma funcional de la tensión medida sobre el material ya no era armónica en el tiempo.

Observemos además que  $\varepsilon$ , para no ser más restrictivos, también puede considerarse como una cantidad compleja. Esto hace aparecer naturalmente la conductividad de los materiales, lo cual nos hace suponer que el comportamiento de los mismos frente a un campo externo es totalmente diferente dependiendo si el material es conductor o no lo es.

En nuestro caso, observamos que para las mediciones del ferrite, no se manifestaba un desfase de la tensión inducida respecto de línea a distintas alturas (ver nuevamente Figura 5) lo cual nos hace esbozar la hipótesis de que el desfase puede estar relacionado también con las corrientes parásitas inducidas en el material; o sea, como el ferrite no es conductor, grosso modo, no se inducen corrientes y, por tanto, no se observa desfase. Por otro lado, en la barra de hierro que si es conductora, si se inducen corrientes y, como es el caso, se observa desfase (ver Figura 2).

#### **F.e.m. inducida en el ferrite**



**Figura 5.** F.e.m. inducida en la barra de ferrite en los extremos opuestos. Obsérvese la diferencia de fase es prácticamente 0 y la gran deformación de la onda senoidal de entrada.

Otra cuestión que sale de la generalidad de este tratamiento es la de considerar las propiedades anisotrópicas del medio. Si tenemos en cuenta que, por ejemplo, las propiedades mecánicas de un elemento de metal pueden cambiar según sea el proceso de fabricación (por ejemplo las chapas fabricadas por laminación continua en un sentido), surge que también las propiedades electromagnéticas pueden depender de esto. Un análisis detallado de la formulación sugiere que en **17**, las funciones pueden ser tensoriales y, por tanto pueden dar lugar a que la propagación de la onda electromagnética radialmente en nuestra barra sea distinta a la propagación transversal, dando lugar a efectos mas variados que el simple desfase, como ser una frecuencia distinta. Esto no es lo observado en nuestra experiencia,

por lo menos en la precisión que nos permiten los instrumentos.

### **VIII. Bibliografía**

1. R. C. Weast ed., "Handbook of Chemistry and Physics", CRC Press, Cleveland. S/d.
2. Félix Rodríguez Trelles, "Temas de Electricidad y Magnetismo", Ed. Eudeba, Buenos Aires, 1984.
3. J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics", Ed. John Wiley & Sons, New York, Second Edition, 1975.
4. S. Y. Mak y K. Young, Am. J. Phys. 54, 808 (1986).
5. J. Hall, Phys. Teacher 35, 80 (1997).