

Estudio de la dinámica no lineal de un sistema mecánico sencillo (bouncing ball)

Sebastián Nuza y Diego Zocco (mailto: sebasn@hotmail.com , dieduke@yahoo.com)

Laboratorio de Física 5, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Buenos Aires, febrero de 2001

En el presente trabajo se estudió la dinámica de un sistema mecánico formado por una bolilla que rebota sobre una superficie forzada con un movimiento sinusoidal. Se estudió la relación entre amplitud del forzado y el período de la bolilla con el mapa cuadrático que constituye una ruta simple hacia el caos. El valor de la constante característica de este tipo de sistemas, la llamada *delta de Feigenbaum*, se determinó en 5.5 ± 7.9 . Este valor contiene al valor teórico para la delta que es aproximadamente 4.6692. De todos modos se propone trabajo futuro para dilucidar en forma completa al problema.

1. Introducción y marco teórico.

Es sabido que gran cantidad de sistemas mecánicos presentan comportamientos caóticos generados a partir una ruta de período doble⁽¹⁾. Por esto primero introduciremos algunos conceptos al respecto.

Como primer punto describiremos el concepto de atractor⁽²⁾. Son muy conocidas las ecuaciones de tipo recurrentes donde a partir de un valor inicial o semilla x_0 se evalúa dicha ecuación o función $f(x)$, para luego utilizar el nuevo valor obtenido como nueva semilla y hallar $f(f(x))$ y así sucesivamente, estudiando los diferentes patrones resultantes.

Una de estas funciones no monótonas, es decir, cuyo crecimiento o decrecimiento no está fijo, es $f(x) = 4\lambda x(1-x)$, con λ entre 0 y 1. Para valores de x también entre 0 y 1 vemos que $f(x)$ está siempre entre 0 y λ (ver figura 1), con lo cual no habría problemas.

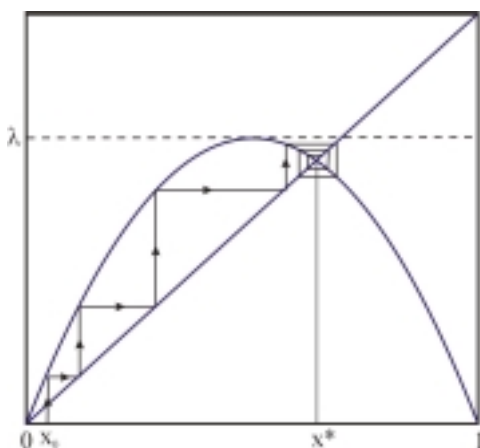


Figura 1 – Atractor de período 1. Vemos que aparece un único punto fijo x^* , donde la pendiente de la curva es menor a 45° .

El factor cuatro en la función se encuentra sólo para que a $x = 1/2$ el valor de y coincida con el de λ .

Los cambios en los patrones obtenidos dependen únicamente del valor de λ considerado, pudiéndose obtener una amplia variedad de órbitas, es decir, secuencias de x , $f(x)$, $f(f(x))$, etc. Para construir el gráfico anterior se procede de la siguiente manera: con un valor inicial de, por ejemplo, $\lambda = 0.7$, elegimos un valor inicial de $x_0 = 0.04$. Para dicho x_0 tomamos el correspondiente punto sobre la parábola (hacia arriba), obteniendo el valor de $y_0 = f(x_0)$. Como este valor $f(x_0)$ será nuestro nuevo x a introducir en la función, buscamos la intersección de $f(x_0)$ con la recta $x = y$, lo que nos dará dicho nuevo valor de x , el x_1 , a partir del cual repetimos la operación realizada con el x_0 , observando que terminamos obteniendo valores de x e y que nos mantienen rodeando a un punto (x^*, y^*) bien definido. Este punto corresponde a uno de los puntos de intersección de la $f(x)$ con la función $y = x$, más precisamente al distinto de cero, $x^* = 9/14$, para el cual obviamente se obtiene un ciclo infinito $f(x^*) = x^*$. A x^* es lo que llamamos *punto fijo atractor*, diferenciándose del $x = 0$ en que este último ‘repele’ los resultados de la iteración, sea cual fuere el valor inicial x_0 (salvo $x_0 = 0$).

¿Qué controla la estabilidad o no estabilidad de estos puntos fijos? La respuesta está en la pendiente del salto producido al pasar de un x_i al siguiente. Es la pendiente local de la $f(x)$ la que controla cuán lejos uno se mueve horizontalmente en el gráfico al iterar la función. El criterio para determinar la estabilidad o no de un punto fijo se encuentra en si la pendiente local en dicho punto es menor o mayor a 45° , respectivamente, independientemente de si estamos en la subida o en la bajada de la función.

Para valores mayores de λ , la posición del x^* va cambiando y con esto la pendiente de la f en x^* . A

partir de un $\lambda \equiv \Lambda_1$, correspondiente a una pendiente de 45° , sucede algo interesante: la iteración comienza a oscilar entre dos valores, x^*_{1} y x^*_{2} (figura 2), formando lo que llamamos un *ciclo - 2*, donde los puntos fijos son también atractores, pero de período dos.

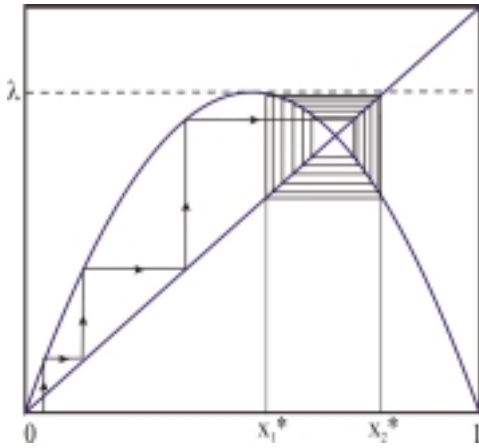


Figura 2 - Atractor de período 2. En este caso tenemos dos puntos fijos estables.

Para seguir estudiando qué pasa si aumentamos aún más el valor de λ , debemos enfocarnos en una nueva función $g(x) = f(f(x))$. Para esta función, si continuamos subiendo λ vemos que al sobrepasar la pendiente de 45° ($\lambda \equiv \Lambda_2$) en los puntos fijos x^*_{1} y x^*_{2} de $g(x)$ (iguales a los de $f(x)$ ya que $f(x^*_{1}) = x^*_{2}$ y $f(x^*_{2}) = x^*_{1}$), cada uno de éstos se abren en otros dos nuevos puntos fijos, lo que corresponde a dos nuevos *ciclos - 2* para la $g(x)$ o un *ciclo - 4* para la $f(x)$ (período 4). Así, analizando nuevas $f(f(...f(x)...))$ podemos encontrar a partir de $\lambda \equiv \Lambda_{3, 4, \dots}$ ciclos de períodos 8, 16, etc.

Un dato importante a tener en cuenta es que los valores de Λ convergen a un λ_c . La razón de dicha convergencia viene dada por lo que llamamos la *delta de Feigenbaum*:

$$\delta_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Lambda_n - \Lambda_{n-1}}{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n} = 4.6692\dots$$

Si realizamos la iteración anteriormente descrita con muchos valores de λ podemos formar un gráfico de **puntos fijos en función de λ** , conocido como *mapa cuadrático*, donde se puede apreciar la bifurcación en los distintos ciclos (figura 3).

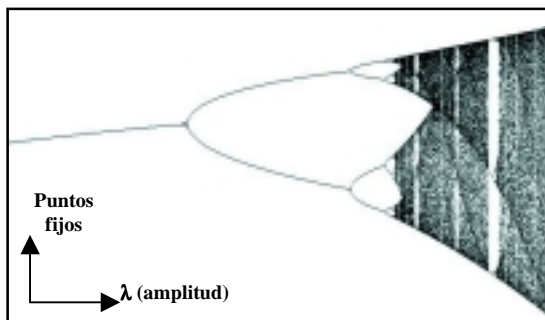


Figura 3 - Mapa cuadrático

2. Descripción del experimento.

El dispositivo armado en este trabajo fue como el que se observa en la figura 4. El arreglo experimental consistía en un parlante alimentado mediante una señal proveniente de un generador de ondas, conectado a un amplificador de audio, con el propósito de inducir el movimiento a una bolilla de acero. Debido a las características no deseadas de la señal amplificada, conectamos un circuito RC serie para hacer a la misma más manejable (figura 5).

El parlante poseía adherido en su parte superior un accesorio metálico con el fin de utilizarlo como base para que la bolilla pueda rebotar. El mismo presentaba una forma cóncava para mantenerla sobre el eje perpendicular del dispositivo, de tal forma de poder considerar al sistema unidimensionalmente.

En la parte inferior de este accesorio colocamos un piezoeléctrico delgado de tal forma que pueda detectar los golpes de la bolilla (ver vista ampliada en la figura 4). Dicho piezoeléctrico se encontraba conectado a un filtro debido a que la señal original presentaba ruido, lo que dificultaba la observación de

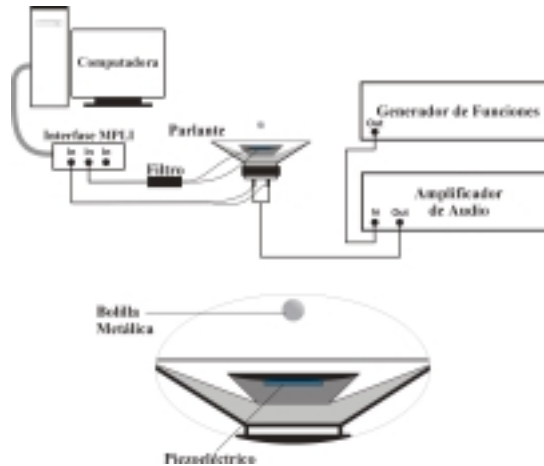


Figura 4 – Arreglo experimental. En la imagen ampliada se observa en detalle la ubicación del piezoeléctrico en el parlante.



Figura 5 – Dispositivo de filtrado de la señal proveniente del piezoeléctrico. R_3 reduce la impedancia del piezoeléctrico para disminuir el ingreso de señales externas no deseadas; R_2 facilita la descarga veloz de C_1 ; el diodo se encuentra para eliminar la componente negativa de la señal que será enviada al sistema de adquisición de datos (DAQ).

los pulsos generados en los rebotes. A su vez este circuito se encontraba unido al DAQ (sistema de adquisición de datos), al igual que la señal de forzado con que se alimentaba el parlante, con el objetivo de

poder compararlas y observar sus períodos superpuestos.

El trabajo consistió en encontrar las amplitudes del forzado que generaban períodos de la bolilla correspondientes a T , $2T$ y $4T$, análogamente a lo que ocurre en el mapa cuadrático, es decir, **λ es en nuestro modelo la amplitud del forzado**. La frecuencia del parlante, es decir del forzado, fue de 65 Hz y se varió la amplitud del generador para realizarlo. Esta frecuencia nos permitió manejar un amplio espectro de amplitudes dentro del cual pudiésemos encontrar los períodos de la bolilla buscados. Dicho espectro se encontraba limitado por el amplificador, cuya señal de salida se veía saturada a partir de un cierto valor de entrada, y por la resolución del generador.

Realizamos una calibración de la amplitud entregada por el amplificador para verificar su linealidad y encontrar la ganancia correspondiente, la cual resultó ser de 11.56 ± 0.03 , según ajuste de cuadrados mínimos. Este error no produce variaciones significativas en los datos obtenidos por lo que no será tenido en cuenta al hacer la conversión.

3. Análisis de datos

Es interesante observar que en concordancia con el modelo utilizado los períodos T , $2T$ y $4T$ fueron observados razonablemente ubicados dentro del

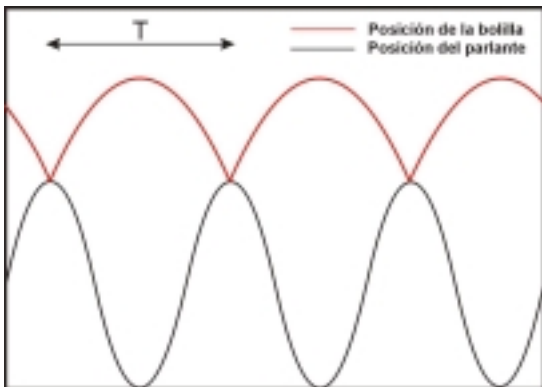
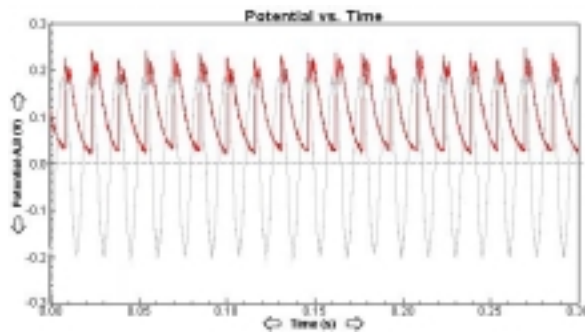


Figura 6 – Período $1T$ (imagen superior) y esquema correspondiente. En este caso los picos del piezoeléctrico (bolilla, rojo) se coinciden con la posición de altura máxima del parlante (gris).

orden esperado, tal como se puede ver en las figuras 6,7 y 8, donde se puede observar los gráficos obtenidos con la tarjeta de adquisición, además de esquemas representativos de los distintos períodos. La señal gris corresponde a la amplitud de la diferencia de potencial aplicada sobre los bornes del parlante, asociada al parámetro λ del análisis teórico, y cuyo valor fuimos variando para encontrar los distintos períodos. La señal roja corresponde a los rebotes de la bolilla sobre el piezoeléctrico y cuya amplitud está asociada al valor del punto fijo correspondiente al λ de la amplitud de señal entregada al parlante. La analogía nos muestra como válidos los períodos que sean de la forma $2^n \cdot T$. Después de seguir aumentando la amplitud nos encontrábamos con períodos que variaban muy rápidamente al azar y zonas en las cuáles desaparecía el caos para luego volver a comenzar.

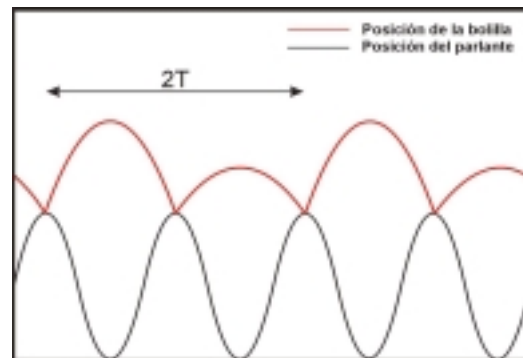
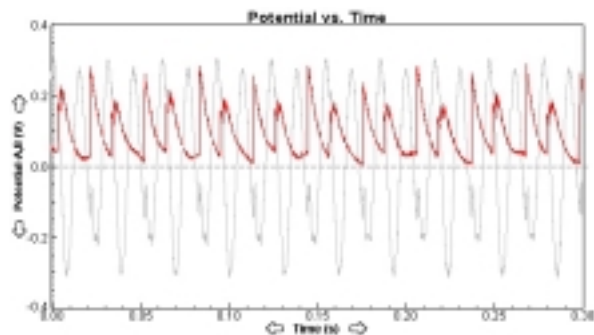


Figura 7 – Período $2T$.

También nos fue posible observar el período $6T$, el cual abre nuevas posibilidades de interpretación. Vale la pena notar que períodos de este tipo también fueron observados en sistemas no-lineales del tipo eléctrico cuando se esperaba solo períodos de la forma $2^n \cdot T$ por A. Christine Rauch⁽³⁾ dentro de la zona caótica en forma similar a lo observado por nosotros. De todas formas la autora concluye que la analogía es aceptable ya que el valor de la delta de Feigenbaum calculada con los valores que corresponden a T , $2T$, $4T$ y $8T$ cae dentro del orden esperado.

También es posible que la aparición de tales anomalías, es decir el $6T$, se deban principalmente al dispositivo utilizado el cuál podría mejorarse para evitar todo tipo de perturbaciones no deseadas tales

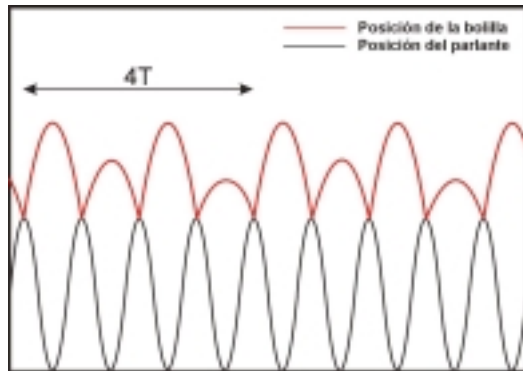
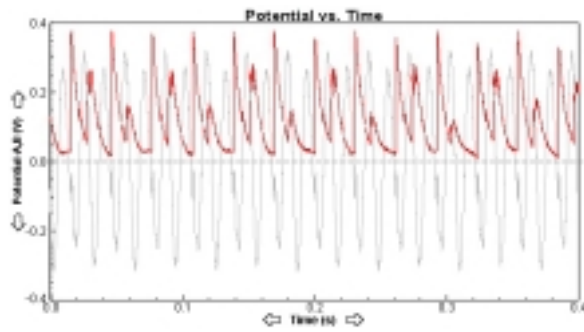


Figura 8 – Período 4T

como desviaciones de la vertical por parte de la bolilla debida a múltiples factores. La repetición del experimento con un nivel superior de control sobre tales variables permitiría descartar dudas y arrojaría más luz sobre si la analogía es completa o si en definitiva no es totalmente satisfactoria (no olvidar que la ruta de períodos $2^n T$ hacia el caos no es la única que puede aparecer en los sistemas físicos reales).

La delta de Feigenbaum calculada a partir de las amplitudes observadas para cada período se puede aproximar según la ecuación:

$$\delta_F \cong \frac{A_2 - A_1}{A_3 - A_2}$$

Período	Valores medidos*11.56 [V]	Valor medio [V]	Error [V]
T	0,1734 - 0,1849	0,179	+/- 0,001
2T	0,2358 - 0,2428	0,239	+/- 0,007
4T	0,2474 - 0,2532	0,25	+/- 0,006

Tabla 1

De los datos experimentales (tabla 1) y la fórmula anterior podemos inferir un valor para la delta de 5.5 ± 7.9 , la cuál posee un valor medio que concuerda con el orden del valor $\delta_F = 4.6692\dots$, calculado teóricamente por Mitchell J. Feigenbaum⁽²⁾ usando como modelo el mapa cuadrático. El error asignado es grande debido a que las amplitudes para cada período se encontraban ubicadas dentro de una banda muy ancha, la cual nos proporcionó el error asignado para cada una. De estos errores, y por propagación, calculamos el error asignado a la medición. La razón de la existencia de esa banda se debe principalmente a la dificultad que tuvimos para

determinar las amplitudes, debido a que era muy difícil observarlas ya que cualquier perturbación hacía que perdimos el movimiento periódico de la bolilla que era el que nos interesaba.

4. Conclusiones

El mapa cuadrático puede representar muchas características de sistemas mecánicos en donde se produce una no linealidad debido a rebotes discretos; esto es lo que nos interesa.

Este mapa presenta un ruta hacia el caos con soluciones que evolucionan según 2^n hasta el infinito con la particularidad de que el parámetro λ posee intervalos en donde viven las soluciones 1,2,4,8,16..., pero esos intervalos tienden a cero a medida que avanza n, es decir que los períodos en 2^n convergen a medida que se alcanza un determinado λ crítico. Más allá de ese parámetro las soluciones se tornan caóticas. En nuestro experimento las principales características del mapa cuadrático fueron reproducidas. El parámetro λ tenía su análogo en la amplitud A y las soluciones de la forma 2^n lo tenían en los períodos de la bolilla. Debido a la resolución de nuestro generador de ondas sólo pudimos observar los períodos T, 2T y 4T, es decir llegaba un punto que nos pasábamos del valor crítico y sólo observábamos rebotes al azar. La delta de Feigenbaum esta centrada cerca del valor esperado, pero los errores determinados son grandes ya que resultó muy difícil determinar las amplitudes correspondientes porque el sistema presentaba muchas perturbaciones no deseadas.

También se observó un período 6T, que no está contemplado en el mapa cuadrático, por lo cual dejamos para estudio futuro si esto se debe a que el sistema se alejaba del ideal planteado o a que la analogía no es totalmente satisfactoria y hay otros caminos hacia el caos además del 2^n . En base a los resultados obtenidos podemos concluir que el mapa cuadrático es esencialmente correcto en forma cualitativa a pesar del sugerente resultado que posee el valor medio de la delta determinada. Pero no podemos asegurar que sea exacto debido al error grande de la estimación.

5. Bibliografía

- (1) Robert M. May, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature Vol. 261, junio de 1976.
- (2) Douglas R. Hofstadter, *Metamagical Themas*, Scientific American, noviembre de 1981, pág. 22 a 43.
- (3) A. Christine Rauch, *Chaos in a driven, nonlinear electrical oscillator. Determining Feigenbaum's delta*, Saunders College Publishinh, 1976.
- (4) N. B. Tufilaro y A. M. Albano, *Chaotic dynamics of a bouncing ball*, Am. J. Phys. **54** (10), octubre de 1986.

Agradecemos la gentil colaboración de Alejandro Fendrik por sus importantes aclaraciones sobre caos.