

Equilibrio dinámico de un sólido en rotación

Fabrizio Della Picca y Carlos Maximiliano Sendra
amapolam@tutopia.com
Laboratorio 5 – Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires - Marzo 2006

RESUMEN

El presente trabajo tuvo como objetivo estudiar el movimiento de un cilindro hueco suspendido horizontalmente de un cable sujeto a un motor cuyo eje giraba a una frecuencia conocida constante. Se propuso un modelo teórico y se lo comparó con los resultados obtenidos. Se observó que existe una frecuencia crítica (ω_c) en la cual el sistema deja de poseer un equilibrio estable en la posición vertical ($\theta=0$), convirtiéndose en inestable y a partir de la cual aparecen equilibrios estables para ángulos mayores ($\theta>0$).

INTRODUCCIÓN TEÓRICA

El sistema a analizar consiste en un sólido cilíndrico hueco de largo h , cuyo extremo está sujeto a un hilo inextensible de masa despreciable y largo L (ver figura 1).

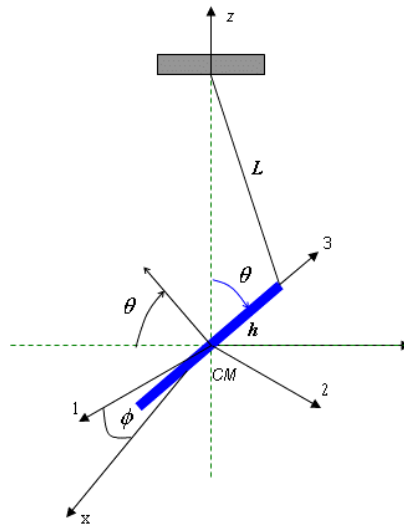


Figura 1. Sistema estudiado. Los ejes 1, 2 y 3 corresponden a los ejes principales de inercia.

El hilo está sujeto al cuerpo de modo tal que el mismo no pueda girar en torno a su eje 3. Por otro lado, de la observación de la experiencia, en el desarrollo teórico de este sistema se consideró que el centro de masa, sólo se desplaza en la componente z .

Elijiendo 1, 2 y 3 coincidentes con los ejes principales de inercia, puede hallarse de manera sencilla las ecuaciones que describen este sistema.

Dadas estas convenciones y suposiciones, el hamiltoniano queda expresado de la siguiente manera,

$$H = \frac{p_\theta^2}{2 \left[M \frac{h^2}{4} \sin^2 \theta \left(1 + \frac{h}{2} \frac{\cos \theta}{\sqrt{L^2 - \frac{h^2}{4} \sin^2 \theta}} \right)^2 \right]} - \frac{1}{2} I \omega^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{2} I_3 \omega^2 \cos^2 \theta - Mg \left(\frac{h}{2} \cos \theta + \sqrt{L^2 - \frac{h^2}{4} \sin^2 \theta} \right) \quad (1)$$

donde $I=I_1=I_2$ (por simetría) e I_3 son los momentos de inercia (ver Apéndice) y M , es la masa del cilindro.

Si ω es constante, en particular, se observa que existe un θ tal que si $\dot{\theta}_0 = 0$ (velocidad inicial), entonces, $p_\theta=0$ para todo tiempo posterior. Este θ lo llamamos de equilibrio (θ_{eq}). Como H se conserva porque no depende explícitamente del tiempo, entonces podemos encontrar los puntos de equilibrio como los mínimos de V .

$$V = -\frac{1}{2} I \omega^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{2} I_3 \omega^2 \cos^2 \theta - Mg \left(\frac{h}{2} \cos \theta + \sqrt{L^2 - \frac{h^2}{4} \sin^2 \theta} \right) \quad (2)$$

Graficando V en función del ángulo, se obtiene,

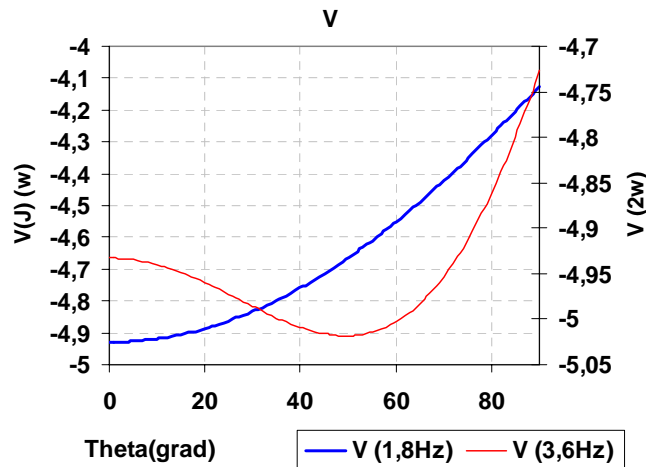


Figura 2. V en función de la frecuencia. Se pueden observar mínimos para ciertas frecuencias.

Para encontrar los puntos en los cuales V es mínimo, hacemos lo siguiente,

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \theta} \right|_{\theta_{eq}} = 0 = \omega^2 \cos \theta_{eq} \sin \theta_{eq} (I_3 - I) + Mg \cos \theta_{eq} \sin \theta_{eq} \left(\frac{h}{2 \cos \theta_{eq}} + \frac{h^2}{4 \sqrt{L^2 - \frac{h^2}{4} \sin^2 \theta_{eq}}} \right) \quad (3)$$

De esta forma, podemos obtener los valores de ω para los cuales el sistema se halla en una posición de equilibrio. Resolviendo, se obtiene,

- $\theta=0$ es una posición de equilibrio para todo ω .
- Si $\theta \neq 0$, entonces

$$\omega = \sqrt{\frac{-Mg}{(I_3 - I) \left(\frac{h}{2 \cos \theta_{eq}} + \frac{h^2}{4 \sqrt{L^2 - \frac{h^2}{4} \sin^2 \theta_{eq}}} \right)}} \quad (4)$$

Esta última expresión, presenta un comportamiento asintótico (ver figura 3) para un dado ω_c , al cual llamamos frecuencia crítica. Es decir, para frecuencias inferiores a ω_c , la única posición de equilibrio está en $\theta=0$; y para frecuencia mayores, encontramos dos posiciones: $\theta=0$ (equilibrio inestable) y θ_{eq} (equilibrio estable).

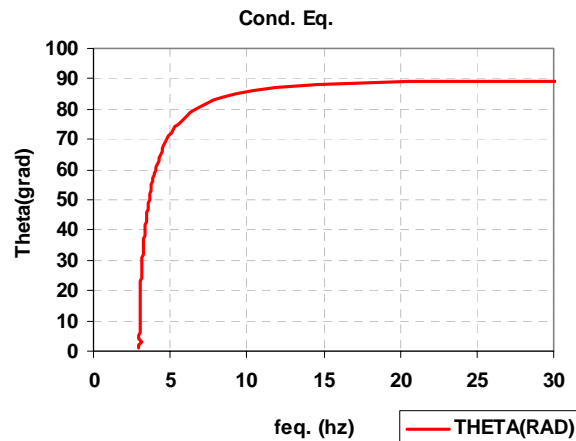


Figura 3. Ángulos de equilibrio en función de la frecuencia. Se observa una asíntota vertical como lo muestra la ecuación 4.

La frecuencia crítica está dada por,

$$\omega_c = \sqrt{\frac{-Mg}{2(I_3 - I) \left(1 + \frac{h}{2L^2} \right)}} \quad (5)$$

ARREGLO EXPERIMENTAL

El dispositivo, como se ve en la figura 5, consta de un motor conectado a un regulador de velocidad de gran precisión. En el eje del motor se fija un cable flexible de masa despreciable y de $(41,1 \pm 0,2)$ cm de largo que tiene en su otro extremo un cilindro hueco de $(19,3 \pm 0,1)$ cm de largo, $(4,75 \pm 0,05)$ mm de radio mayor y $(3,25 \pm 0,05)$ mm de radio menor (la masa no es utilizada).

Para medir la velocidad del motor se colocó una pequeña placa en el eje del motor que al girar interrumpe una barrera creada entre un diodo emisor de luz y un fotodetector. La señal del fotodetector es visualizada con un osciloscopio y de éste se obtiene la frecuencia de giro del motor.

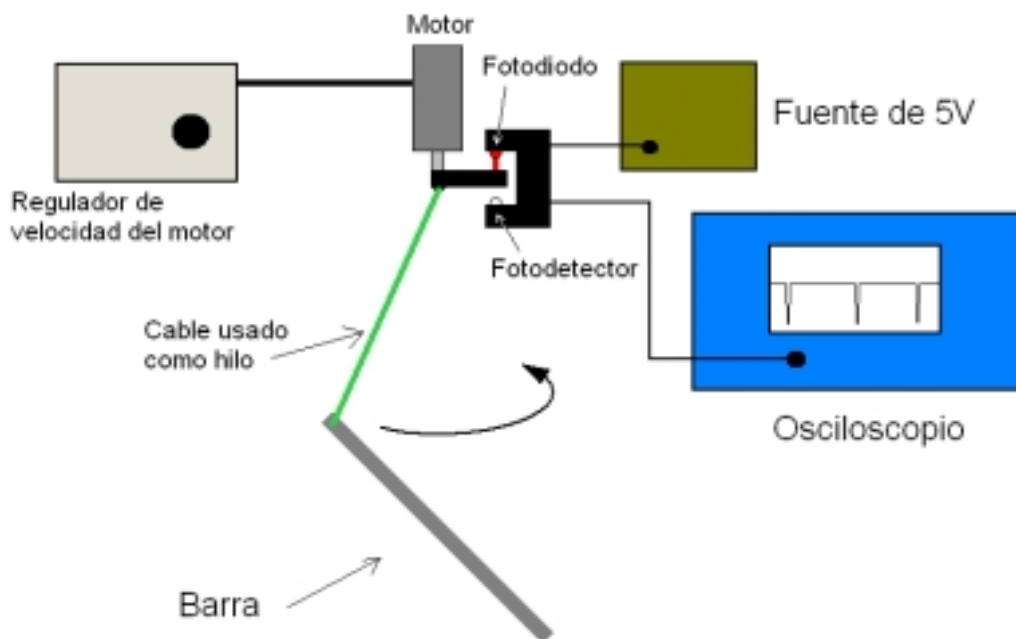


Figura5: Esquema del dispositivo experimental

Para poder medir el ángulo de la barra en cada frecuencia se utilizó una cámara web con la que se tomaron fotos. Para poder comparar se colocó un hilo de referencia detrás del cilindro que marcaba la vertical. Aunque no se consiguió una cámara suficientemente rápida para ver el cilindro en vez de una mancha, la cámara web era suficientemente lenta como para observar una mancha que era producto de un promedio de varios períodos, dando una imagen simétrica que se marca más cuando el plano que contiene a la barra es perpendicular a la dirección de visión de la cámara. Esto sucede porque desde el punto de vista de la cámara, la barra se mantiene más tiempo en esa posición. Puede verse con más claridad en la figura 6.

Para obtener el ángulo simplemente se midió con un editor de imágenes la mitad del largo de la barra en reposo, y para cada foto se tomó la altura (A) del centro de masa al extremo superior como se observa en la figura 6.

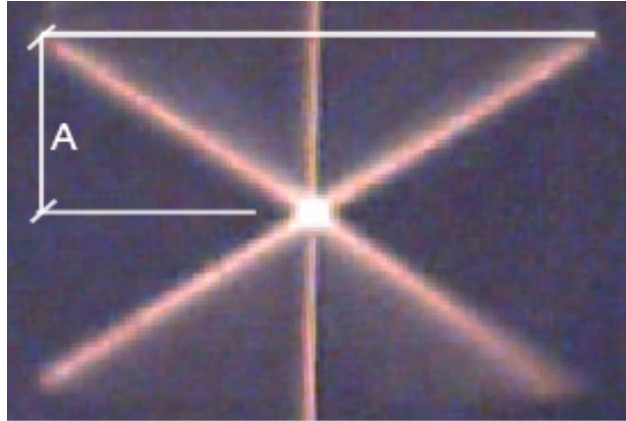


Figura6: foto de la barra a 3,74hz, detrás se observa una marca de la vertical

Después se calculó $\arccos\left(\frac{A}{h_{barra}}\right)$. Todos estos datos están expresados en píxeles pero no es de importancia puesto que la división es adimensional.

RESULTADOS

Con los datos medidos se obtuvo la figura 7 en donde también se graficó la curva teórica para comparar. Los errores en el ángulo son por un error en las fotos de +/- 3 píxeles y aumentan para ángulos pequeños por la forma de extraer el ángulo de las fotos.

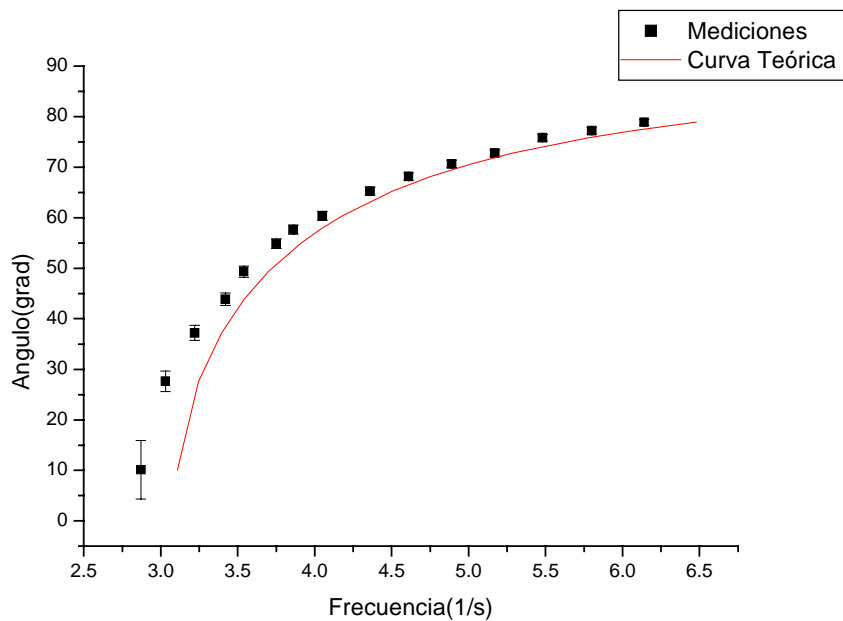


Figura7: Datos medidos y curva teórica

Los errores grandes que aparecen para ángulos pequeños podrían mejorarse cambiando el método de análisis de las fotos (midiendo altura y ancho en vez de sólo altura) pero como vemos, con estos errores no se solapan los datos con la curva teórica.

Como los datos parecen tener una forma muy parecida a la de la curva teórica y parecen tener una correlación muy buena (parecen seguir una curva bien definida), lo que se hizo es refinar el cálculo de la curva teórica.

Se encontró que el factor que más influía es el hecho de que el alambre estaba fijado a 6mm del extremo del cilindro. Después de varias pruebas se vio que esto no cambiaba el momento de inercia (que es una característica de la geometría y masa del material únicamente) pero sí al resto, que principalmente estaba compuesto por el potencial gravitatorio.

Corrigiendo esto se obtuvo la figura 8.

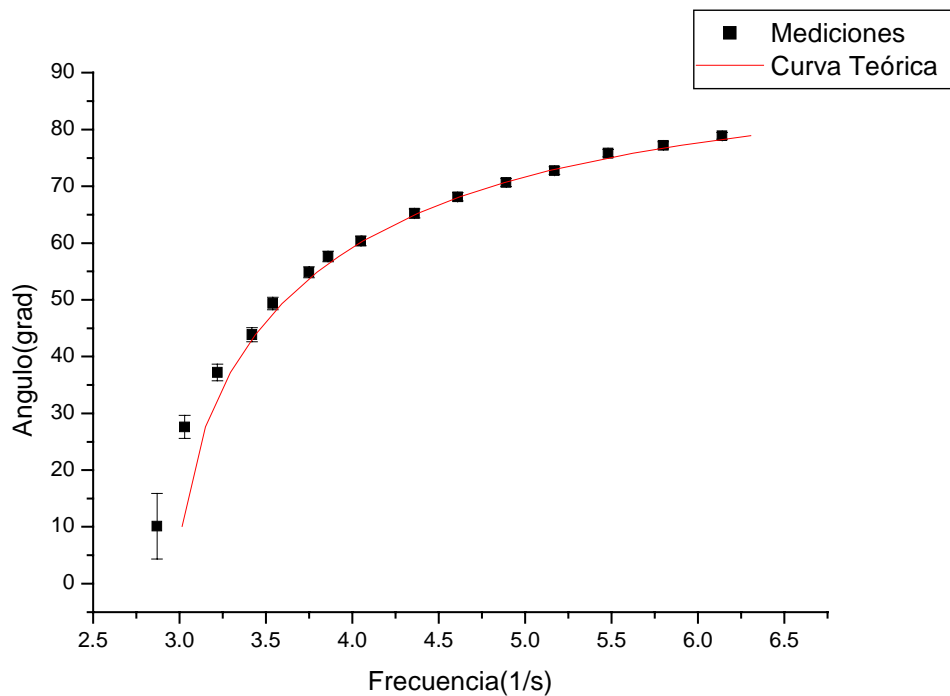


Figura 8: Mediciones y curva teórica corregida

CONCLUSIONES

Como se pudo observar, el modelo propuesto para este sistema físico es muy satisfactorio, pero creemos que puede mejorarse aún más si se tienen en cuenta más detalles, como el último mencionado en resultados. Un ejemplo de esto puede ser la falta de masa en el extremo de la barra por el agujero utilizado para fijar el hilo.

Otro agregado que podría hacerse es medir para otro tipo de cuerpo, esto no pudo llevarse a cabo en este trabajo porque al cambiar el cuerpo se dificultó la extracción del ángulo, lo que suponía un mejoramiento en el método de medición.

BIBLIOGRAFIA

- (1) "Classical Mechanics" Third Edition – Goldstein – Ed. Adison Wesley.
- (2) "Mécanique" - L. Landau et E. Lifchitz
- (3) "Anillo mágico" - M. Mansilla, A. Solernó, J. Tiffenberg, Laboratorio 5 -UBA-2003

APÉNDICE

Momentos principales de inercia del cilindro:

$$I_1 = I_2 = I = \frac{M}{4} \left(r_{ext}^2 + r_{int}^2 + \frac{h^2}{3} \right)$$

$$I_3 = \frac{M}{2} (r_{ext}^2 + r_{int}^2)$$