

# Oscilaciones Acopladas

Nicolás Ramonda  
nramonda@hotmail.com

Hugo Pallaoro  
hpallaoro@argentina.com

## Laboratorio Física 1- FICEN – Universidad Favaloro - 2003

*Se construyó un sistema de 2 masas resortes acoplados por un tercer resorte. Cada masa estaba sujeta a sensores de fuerza conectados a una computadora lo que permitió estudiar el comportamiento del sistema en tiempo real. Esto ayudó a determinar las condiciones iniciales que optimizan el traspaso de energía.*

### Introducción

La actividad tuvo como objetivo describir experimentalmente el mayor traspaso de energía en un sistema de dos osciladores. Las variables estudiadas fueron la distancia entre resortes y la cantidad de vueltas en las que se encuentra el acople del sistema.

Tomamos como modelo el sistema formado por dos resortes, de constante de elasticidad  $k$ , con una masa  $m$  en uno de sus extremos libres. El acoplamiento se efectuó uniendo los resortes mediante otro de constante  $k_c$ .

Aplicamos la segunda ley de Newton para cada uno de los resortes por separado, y escribimos las ecuaciones del movimiento en forma de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$m \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = -k \cdot x_1 + k_c \cdot (x_2 - x_1) \quad (1)$$

$$m \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = -k \cdot x_2 - k_c \cdot (x_2 - x_1) \quad (2)$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  son los desplazamientos de cada una de las masas a partir de su posición de equilibrio;  $k$  es la constante de elasticidad de los resortes que sostienen masa y  $k_c$  del resorte que une a éstos.

Sumando y restando (1) y (2) tenemos, la **ecuación diferencial de un Movimiento Armónico Simple**.

$$m \cdot \frac{\partial^2 (x_1 + x_2)}{\partial t^2} + \frac{k}{m} \cdot (x_1 + x_2) = 0 \quad (3)$$

$$m \cdot \frac{\partial^2 (x_1 - x_2)}{\partial t^2} + \frac{k + 2k_c}{m} \cdot (x_1 - x_2) = 0 \quad (4)$$

que determinan dos movimientos armónicos simples de frecuencias:

$$\omega_a^2 = \frac{k}{m} \quad (5)$$

$$\omega_b^2 = \frac{k + 2k_c}{m} \quad (6)$$

Las soluciones de estas dos ecuaciones, son respectivamente

$$x_1 = A_{11}\text{sen}(w_a t + Q_{11}) + A_{12}\text{sen}(w_b t + Q_{12}) \quad (7)$$

$$x_2 = A_{21}\text{sen}(w_a t + Q_{21}) + A_{22}\text{sen}(w_b t + Q_{21}) \quad (8)$$

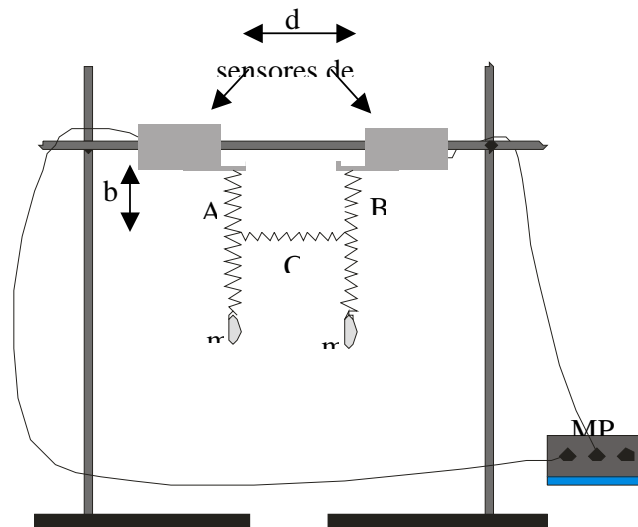
Donde las amplitudes  $A_{ij}$  y las fases iniciales  $Q_{ij}$  están determinadas por las condiciones iniciales: posición inicial y velocidad inicial de cada una de las masas. De ellas obtenemos la fórmula teórica que verifica nuestras muestras. Se utilizo para medir un software que nos proporciona el voltaje ( $v_n$ ) en para distintos valores de tiempo. Como éstas son proporcionales a las fuerzas ( $x_1 \propto v_1$  y  $x_2 \propto v_2$ ), trabajamos con  $X_n$ .

$$X_n = A_{n1}\text{sen}(w_a t + Q_{1n}) + A_{n2}\text{sen}(w_b t + Q_{n2}) \quad (9)$$

De aquí obtenemos nuestros datos a analizar: la frecuencia.

## Desarrollo

Se construyo un sistema compuesto por dos resortes (A y B) de igual constante de elasticidad, unidos por otro resorte (C). Los resortes A y B se los conecta a dos sensores de fuerza que nos dan como dato el voltaje independiente de cada uno de ellos en función del tiempo (t) y en sus extremos libres se le colocan las masas  $m$  de igual magnitud como se muestra en la Figura 1.



**Figura 1:** Diseño del sistema estudiado. A y B resortes de igual  $k$ , C resorte de acoplamiento con  $k_c$ .  $b$  es la distancia equivalente a  $n$  vueltas de resorte y  $d$  es la distancia entre resortes.

Al aplicar una fuerza sobre uno de los resortes, el sistema pierde el equilibrio, comenzando a oscilar. Luego de un determinado tiempo, se puede observar cómo el resorte, al cual se le aplicó una fuerza, pierde movimiento y el otro comienza a moverse.

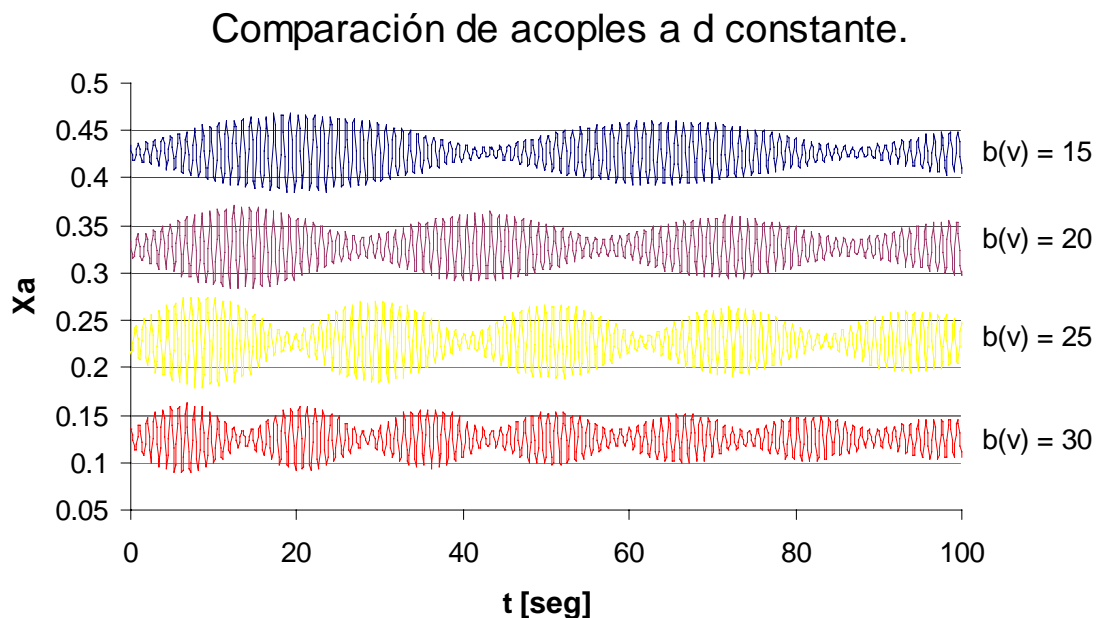
Fijando la distancia  $d$  entre resortes en 9 centímetros y variando la distancia  $b$ , donde se coloca el resorte de acople, comparamos el mejor el traspaso de energía. Luego, realizamos la misma observación manteniendo la distancia  $d$  en 30 vueltas. Mediante un análisis de gráficos obtuvimos la frecuencia, amplitud y velocidad angular.

Para ello, ajustamos nuestras condiciones iniciales basándonos en el marco teórico brindado por la expresión de  $X_n$  dada por (9).

## Resultados

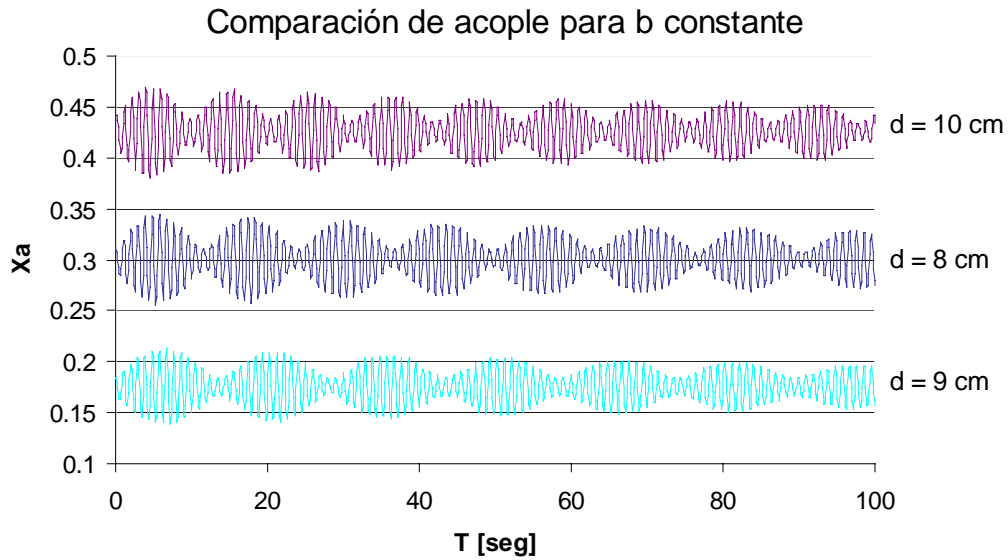
Representando los datos en gráficos y observando la frecuencia transcurridos los 100 segundos, decidimos cual era el mejor traspaso de energía del sistema. Ésta está determinada por los siguientes factores: variación de la cantidad de vueltas (15v, 20v, 25v, 30v); y distancia entre resortes (8cm, 9cm, 10cm); conjuntos con la estabilidad del sistema, la cual se ve afectada al sobrepasar las 30 vueltas.

Para representar la comparación entre acoples para la variación de vueltas, a  $d = 9\text{cm}$  constante, generamos un gráfico que incluye a los valores de  $X_a$ , corridos en unidades de  $x$ , para una mejor visualización. En la Figura 2 se muestra la gráfica de ésta comparación.

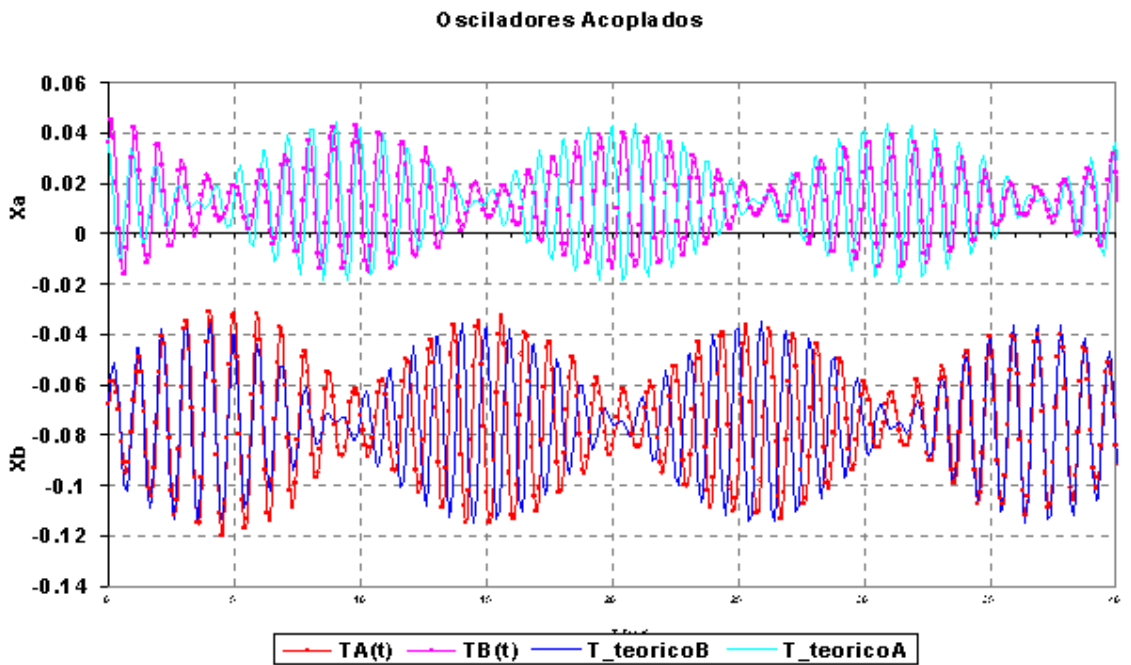


**Figura 2:** Representación de los  $X_a(t)$  para diferentes valores de vueltas de resorte, corridos en unidades enteras, para poder ser visualizados con mayor facilidad. La distancia de acople  $b$ , se mide en número de vueltas, medidas a partir del extremo superior del resorte.

Al representar la comparación entre acoples para la variación de distancias entre resortes, fijamos la cantidad de vueltas con el mejor traspaso de energía encontrado. Graficamos  $X_a$  variando, de la misma manera, los datos originales para optimizar la gráfica que facilite la comparación. (Véase Figura 3).



**Figura 3:** Representación de  $X_a(t)$  variando los datos en unidades de  $x$ , para obtener una mejor visión y facilitar la comparación.



**Figura 4:** Gráfica del traspaso de energía. Incluye como guía la  $X_n$  para cada una de los  $n$  graficada en el intervalo de tiempo (0,40) en segundos.

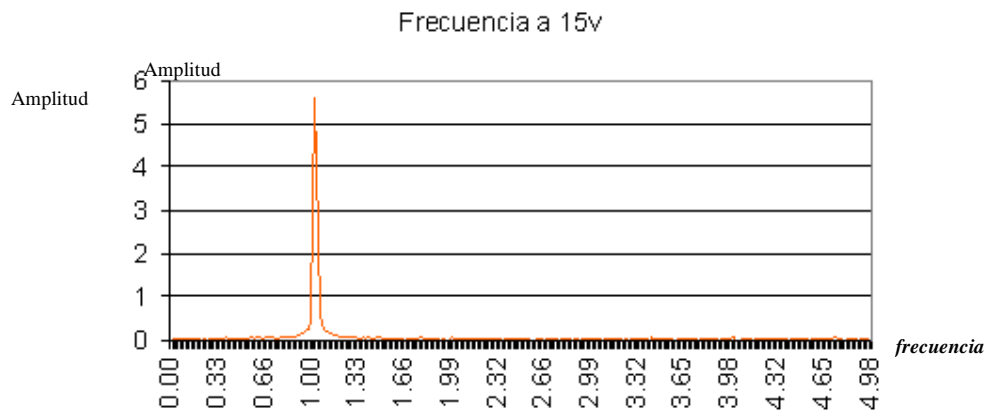
Para efectuar un mejor análisis de los datos obtenidos, calculamos las transformadas de Fourier para cada una de nuestras muestras. De esta forma obtenemos las gráficas de amplitud en función de la frecuencia, lo cual facilita su lectura y comparación.

Como puede notarse en la gráfica 5, las frecuencias están casi superpuestas y ambas tienen un valor aproximado de 1.1 Hz.

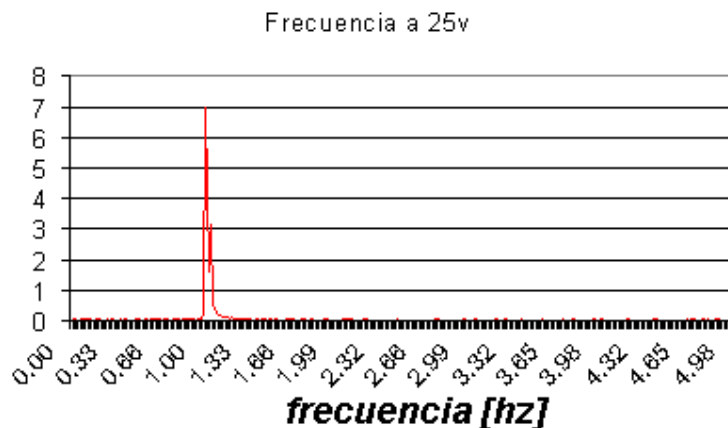
Para el caso de la figura 6, donde el valor de la distancia  $b(v) = 25$  vueltas, puede observarse que la diferencia de frecuencias es de aproximadamente 0.6 Hz. ( $f_1=1.11, f_2=1.17$ )

En la figura 7, correspondiente a una distancia de  $b(v)=20$  vueltas de resorte, la diferencia de frecuencias es de aproximadamente 0.4 Hz. ( $f_1=1.11, f_2=1.15$ ).

Por último, en la figura 8, correspondiente a una distancia de  $b(v)=30$  vueltas de resorte, notamos que la diferencia de frecuencias es de aproximadamente 0.8 Hz. ( $f_1=1.11, f_2=1.19$ )



**Figura 5:** Gráfica de la frecuencia a distancia  $b(v)=15$  vueltas de resorte.



**Figura 6:** Representación de la frecuencia para el valor de distancia  $b(v)=25$  vueltas de resorte.

## Conclusión

De la ecuación (3) vemos que el movimiento general de dos osciladores acoplados puede considerarse como la superposición de dos modos normales de oscilación de frecuencias angulares  $w_a$  y  $w_b$ .

Con el análisis de frecuencias podemos decir que la transferencia de energía será mayor a mayor distancia  $b$ , o sea cuando el resorte que se usa de acople, está más cerca de las masas.

De la Figura 2 y 3, vemos que el mayor traspaso de energía se da en la combinación: 30 vueltas, 10 cm, graficado en la Figura 4; (cercano al límite que impone el sistema). Para una cantidad mayor de vueltas ( $v > 30$ ) o distancia ( $d > 10$  cm), el sistema colapsa, rompiendo la oscilación armónica.

De los resultados obtenidos podemos afirmar que el mejor traspaso de energía depende de la posición del resorte C y de la estabilidad del sistema.

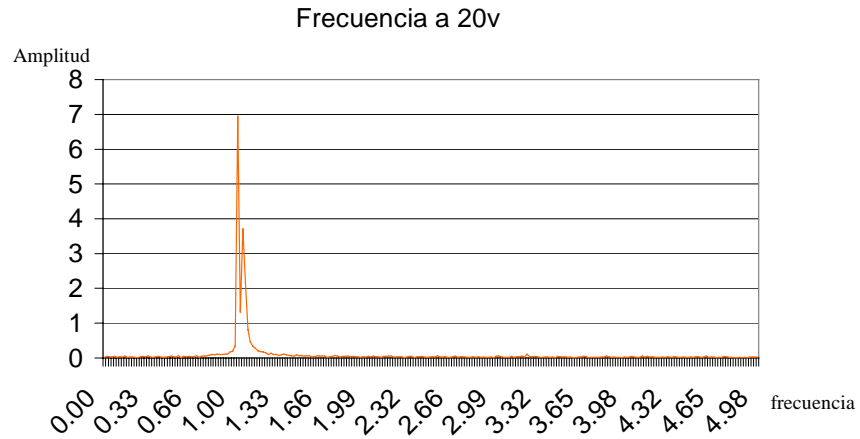


Figura 7: Representación de la frecuencia para el valor de distancia  $b(v)=20$  vueltas de resorte.

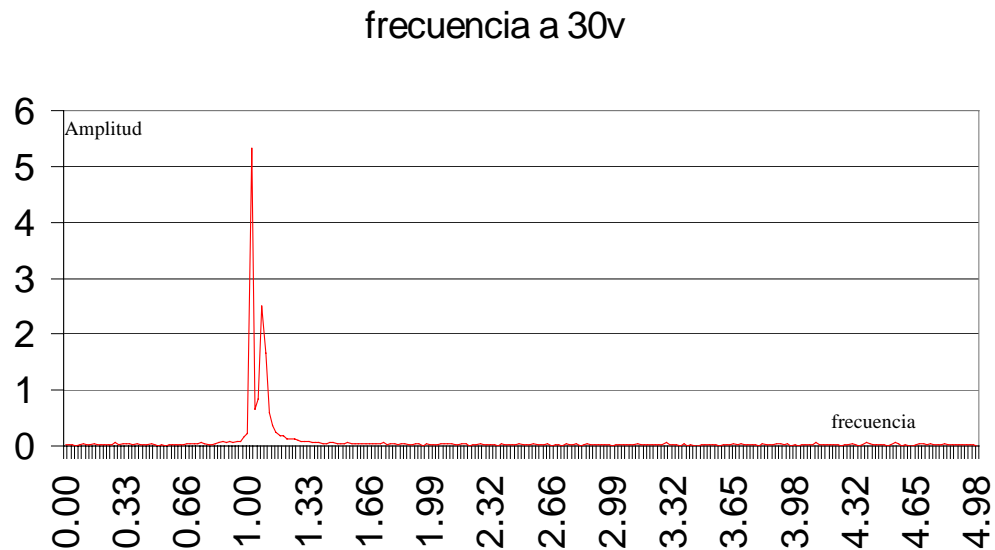


Figura 8: Representación de la frecuencia para el valor de distancia  $b(v)=30$  vueltas de resorte.

**Bibliografía**

1. Vibraciones mecánicas - W. W. Seto - Schaum Serie- Mc Graw Hill Panamá 1970.
2. Coupled harmonic oscillators made easy , Antonino Carnevali and Cynthia L. Newton Phys. Teach. 38, 503 (2000).
3. The coupled harmonic oscillator: Not just for seniors anymore, Norris W. Preyer Phys. Teach. 34, 52 (1996)