

Resonadores de Helmholtz

Carolina Hugo y Alejandra Ventura

LABORATORIO 4 - Dpto. Física – UBA. Primer Cuatrimestre 1998
 e-mail: eileen_br@yahoo.com jventura@intramed.net.ar

Se describe un experimento que permite medir la velocidad del sonido con un error inferior al 5%. El dispositivo consiste en un resonador de Helmholtz con simetría cilíndrica, en este caso se utiliza una botella. El sistema es análogo a una masa vibrando en un resorte: la frecuencia de resonancia está relacionada con la masa del tapón de aire situado en el cuello de la botella y sus proximidades, y con la constante del resorte, asociada a la elasticidad del aire que llena el resto de la botella. Se detalla un procedimiento simple y una discusión de las aproximaciones que en éste están involucradas. Además, se analiza el comportamiento general del resonador más allá de la frecuencia fundamental.

I. INTRODUCCIÓN

Al excitar la masa de aire en el interior de una botella, puede obtenerse una nota musical. Este fenómeno ocurre en botellas de forma arbitraria y corresponde a una oscilación forzada diferente a la que presenta un simple tubo, se trata en este caso de un *resonador de Helmholtz*. En estos dispositivos, la oscilación del aire que se encuentra en el cuello de la botella provoca la compresión y descompresión del aire del cuerpo. Si las dimensiones del resonador son pequeñas comparadas con la longitud de onda del sonido, el gradiente de presión en el cuerpo de la botella es cercano a cero. Los cambios de presión en la botella se deben a las propiedades elásticas del gas en su interior y proveen la fuerza restauradora que actúa sobre el tapón de aire (análogamente a una masa y un resorte).

A continuación se describe un experimento que permite medir la velocidad del sonido usando como resonador una botella parcialmente llena de agua. Se detallan las aproximaciones utilizadas en el mismo y se exhiben los principales resultados obtenidos. Se realiza, además, un estudio del resonador más allá de su frecuencia fundamental.

II. DESCRIPCIÓN TEÓRICA DEL OSCILADOR

Por simplicidad consideraremos que la botella está formada por dos cilindros rectos de sección circular y diferente diámetro, como se indica en la Figura 1. La frecuencia angular de una masa vibrando en un resorte es

$$\omega^2 = k/m \quad (1)$$

donde k es la constante del resorte (en este caso, relacionada con las propiedades elásticas del gas en el cuerpo de la botella) y m es la masa del tapón de aire.

Si la densidad del gas es ρ y el volumen del tapón es v , su masa es $m=v\rho$. La constante del resorte puede ser determinada por el cambio de presión que sufre el tapón debido al resto del gas. La fuerza que siente el tapón es $F=a\Delta p$, donde a es el área del cuello de la botella y Δp es la diferencia de presiones entre el interior y el exterior de la botella. Este cambio de presión se puede referir a un cambio en el volumen del gas a través de la compresibilidad del mismo:

$$K = -(1/V)(\Delta V/\Delta p) \quad (2)$$

V y ΔV se refieren al cuerpo de la botella. Si el aire en el

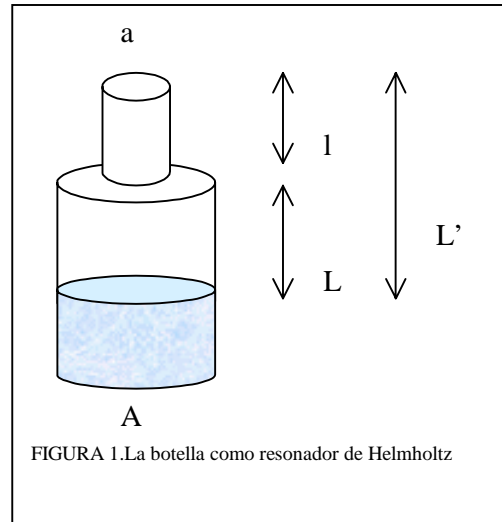


FIGURA 1. La botella como resonador de Helmholtz

el cuerpo cambia en una cantidad $\Delta V = a\Delta x$ y la fuerza resultante en el tapón es

$$F = -(a^2/KV) \Delta x = -k\Delta x \quad (3)$$

Como la velocidad del sonido se puede escribir en términos de la compresibilidad del gas, $c^2 = 1/(K\rho)$ (4)

resulta $\omega^2 = a^2 c^2 / (vV) = (a/A) \cdot (c^2 / lL)$ (5)

donde se utilizó $v = a \cdot l$ y $V = A \cdot L$ (el reemplazo de v y V por l y L simplifica el análisis). La ecuación (5) no está restringida a secciones circulares. La aproximación de separar el problema en una parte completamente inercial (cuello) y otra completamente elástica (cuerpo) puede ser testeada con este experimento. Trabajando con la ecuación (5) se obtiene:

$$L' = L + l = a^2 c^2 / (4\pi^2 l A) \cdot 1/f^2 + l \quad (6a)$$

siendo f la frecuencia fundamental. Análogamente, en términos de volúmenes, queda:

$$V' = V + v = a^2 c^2 / (4\pi^2 v) \cdot 1/f^2 + v \quad (6b)$$

La ecuación (6a) indica que la profundidad de la superficie de agua en la botella varía linealmente con f^{-2} . La pendiente de dicha recta determina la velocidad del sonido y la longitud de l está dada por la ordenada al origen. Se espera que la longitud del tapón de aire sea superior a la del cuello de la botella. Esto se debe a que

la botella tiene el extremo superior abierto y por lo tanto hay una contribución del aire situado sobre y debajo del cuello, al tapón vibrante. En otras palabras, un volumen adicional de aire de longitud Δl y sección a se extiende por encima y por debajo de los límites físicos del cuello de la botella y contribuye al tapón de aire.

Al medir L' desde la boca de la botella, parece que se estuviera ignorando una de estas longitudes adicionales - la correspondiente al aire por encima de la botella-. Puede verse que esto no es cierto de la siguiente forma. Supóngase que se ignora una pequeña parte del volumen de la botella. Entonces, se subestima la energía total del sistema. Como en un ciclo de oscilación las energías cinética y potencial del sistema son iguales, se espera que en ese ciclo la subestimación de esas cantidades sea también igual. Los promedios de las energías son:

$$\langle KE \rangle = (1/2)mv^2 = (1/4)\rho v \omega^2 u o^2$$

$$\langle PE \rangle = (1/2)Kx^2 = (1/4)(\rho a c^2/V).u o^2$$

donde la $u o$ es la amplitud. Puede suponerse que el efecto de esta subestimación aparece como un cambio en el volumen del tapón de aire, v , o en el volumen del cuerpo, V . Dejando constante la frecuencia de oscilación y utilizando la ecuación (5), sale que

$$1 = (\Delta \langle KE \rangle) / (\Delta \langle PE \rangle) = (\Delta v / v) / (\Delta V / V)$$

Luego, las subestimaciones en el volumen del tapón y en el volumen del cuerpo de la botella deben ser iguales. Como $\Delta v + \Delta V = a \Delta l$ (el volumen ignorado), resulta $\Delta v = a \Delta l / (1 + V/v)$ y $\Delta V = a \Delta l / (1 + v/V)$. Como V es generalmente mucho mayor que v , ΔV tiende a $a \Delta l$ y Δv tiende a cero.

Ignorar el volumen $a \Delta l$ sobre el cuello de la botella significa que el volumen del cuerpo de la botella fue subestimado en una cantidad mayor que la cantidad en que fue subestimado el volumen del tapón de aire.

El método de resonador de Helmholtz determina la longitud efectiva del tapón de aire, incluyendo prácticamente todo el aire adicional en ambos extremos. Como la subestimación de Δv se vuelve insignificante al crecer V , este modelo funciona mejor para los L' más grandes dentro del cuerpo de la botella.

III. DESCRIPCIÓN DEL ARREGLO EXPERIMENTAL

Se utilizó una botella parcialmente llena de agua (el nivel de agua es el que determina la longitud L'). En la boca de la botella se colocaron un parlante y un micrófono, tal como se indica en la Figura 2. El parlante fue conectado a un generador de funciones que enviaba una onda senoidal al interior de la botella. Se utilizó un osciloscopio de dos canales para recibir la señal del generador de funciones y la señal captada por el micrófono.

Fijada una cierta amplitud para la onda senoidal, se varió su frecuencia. De esta forma, para una cierta longitud L' , es posible hallar las frecuencias de resonancia de la botella. Se trabajó en un rango de frecuencias de 10 a 6.000 Hz, confeccionando la curva de resonancia correspondiente a un dado L' . Se realizaron mediciones

tanto en el cuerpo como en el cuello de la botella. Las áreas del cuello y del cuerpo (a y A) fueron calculadas colocando un volumen de agua conocido y midiendo el incremento en el nivel del líquido.

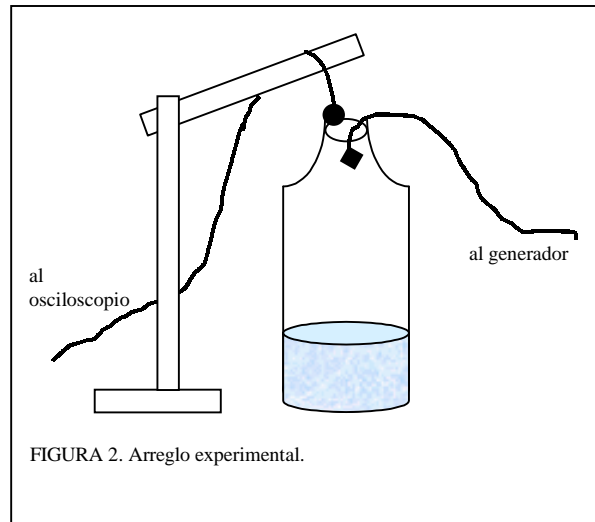


FIGURA 2. Arreglo experimental.

IV. RESULTADOS

-Parte A: Modelo de 'resonador de Helmholtz' (frecuencia fundamental)

Parámetros característicos de la botella:

.área del cuerpo $A = (19.3 \pm 0.3) \text{ cm}^2$

.área del cuello $a = (2.5 \pm 0.1) \text{ cm}^2$

.longitud del cuello $l = (9.00 \pm 0.05) \text{ cm}$

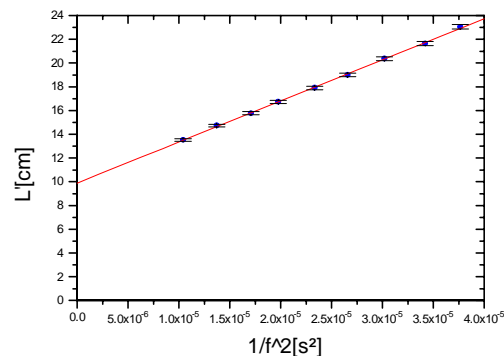


GRÁFICO 1: Recta utilizada para calcular la velocidad del sonido¹.

Los resultados arrojados por esta recta son:

.longitud del cuello $l = (9.89 \pm 0.08) \text{ cm}$

.velocidad del sonido $c = (32.300 \pm 1.200) \text{ cm/s}$ ($\epsilon \sim 4\%$)

El gráfico 2 muestra cuán apropiado resulta aproximar la botella por dos cilindros. Se grafica el volumen efectivo de la botella (V') en función de la distancia desde su boca hasta la superficie de agua (L').

La recta A está dada por $V' = a \cdot L'$ y la recta B por $V' = A L' - \pi(R^2 - r^2)l$. Del gráfico se obtiene $a = (2.60 \pm 0.07) \text{ cm}^2$ y $A = (19.1 \pm 0.2) \text{ cm}^2$.

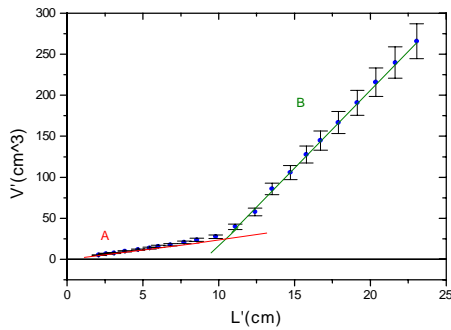


GRÁFICO 2: Comparación entre el volumen real de la botella y los volúmenes resultantes de la aproximación de dos cilindros².

Para una botella similar pero con el cuello más corto se repitieron las mediciones.

Parámetros característicos de la botella:

·área del cuerpo $A=(18.9 \pm 0.3)\text{cm}^2$

·área del cuello $a=(2.5 \pm 0.1)\text{cm}^2$

·longitud del cuello $l=(5.00 \pm 0.05)\text{cm}$

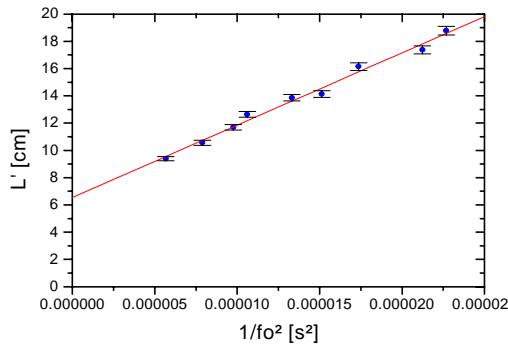


GRÁFICO 3: Recta utilizada para calcular la velocidad del sonido trabajando en el cuerpo de la botella..

Los resultados arrojados por esta recta son:

·longitud del cuello $l = (6.5 \pm 0.08) \text{ cm}$

·velocidad del sonido $c = (32.000 \pm 1.700) \text{ cm/s}$ ($\epsilon \sim 4\%$)

Además, se realizó un gráfico comparativo del volumen del cuerpo (V) en función de la frecuencia fundamental (f_0) para ambas botellas.

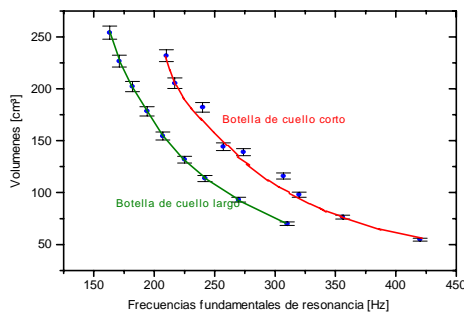


GRÁFICO 4: Gráfico comparativo del volumen del cuerpo en función de la frec. fundamental

-Parte B: Modelo de tubo abierto para el cuello de la botella.

Para las mediciones realizadas en el cuello de la botella, es decir cuando $L' < 1$, es aplicable el modelo de un tubo con un extremo abierto y uno cerrado en la superficie del agua.

Teniendo en cuenta que la longitud efectiva $L^* = L' + \Delta l$ del tubo es superior en un cierto Δl a la longitud medida, dado que el antinodo de desplazamiento se encuentra desplazado en dicho Δl del extremo abierto, y obteniendo ese Δl de la parte A, resulta:

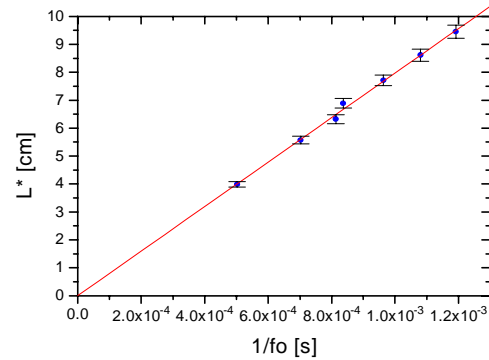


GRÁFICO 5: Recta utilizada para calcular la velocidad del sonido trabajando en el cuello de la botella con la frecuencia fundamental. De aquí, se calcula en $c = (32.000 \pm 1.000) \text{ cm/s}$ ($\epsilon \sim 3.1\%$).

-Parte C: Otras frecuencias de resonancia.

Trabajando en el cuerpo de la botella, las frecuencias de resonancia halladas mantienen una relación lineal con el n° de modo n . A continuación se grafican, para cada L' , todas las frecuencias de resonancia medidas. Este gráfico será tratado con más detalle en la "Discusión de resultados".

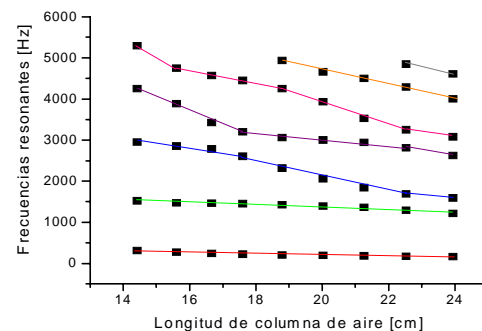


GRÁFICO 6: Frecuencias de resonancia para cada L' .

Para un tubo con un extremo abierto y otro cerrado, vale

$$f_n = \frac{c}{2L^*}n + \frac{c}{4L^*} \quad (7)$$

Considerando los distintos L' , las pendientes (p) y las ordenadas (o) de cada f_n deberían ser lineales con c/L^* , $p = 1/2 \cdot c/L^*$ y $o = 1/4 \cdot c/L^*$. Las ordenadas no responden a este modelo y las pendientes arrojan los siguientes valores: $p = A + Bx$,

$$A = (-38.3 \pm 19.1) \text{ Hz}, B = 0.558 \pm 0.011, r = 0.99883$$

La fórmula (7) puede reescribirse de la forma

$$f_n(L') = (2n+1)/4 \cdot c/L^* \quad (8)$$

o sea, que para n fijo f es una función lineal de c/L^* . Realizando estos gráficos para cada n entre 1 y 4, no se obtienen rectas en ningún caso sino polinomios de grado 5.

V. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La velocidad del sonido obtenida en cada caso está dentro del valor esperado (para ambas botellas y trabajando en el cuello de la primera de ellas).

La longitud del tapón de aire (l arrojado por los gráficos 1 y 3) es superior a la longitud del cuello, de acuerdo a lo previsto por el modelo teórico. Con estos datos se pudo averiguar el valor de l para cada una de las botellas para ser luego utilizado en el resto del trabajo, pues sólo es válido utilizar L' sin corrección para el modelo de resonador de Helmholtz según fue explicado en la *Descripción teórica del resonador*.

El gráfico 2 (V ' vs L') muestra cuán apropiado resulta aproximar la botella por dos cilindros. Las curvas A y B representan los volúmenes de cada uno de ellos. El volumen de la botella es lineal con L' , para niveles de agua por debajo del cuello. Por esta razón, al trabajar en el modelo de resonador de Helmholtz, sólo se utilizó $L' > l$ (siendo l la longitud del tapón de aire).

La frecuencia angular de resonancia está dada por $\omega^2 = k/m$. De acuerdo a lo expuesto en la *Descripción teórica*, m es la masa del tapón de aire y k está relacionado con el volumen V del cuerpo de la botella. Por esto, en el gráfico 4, para un volumen V fijo, la frecuencia de resonancia es mayor para la botella de cuello más corto pues en ella -dado que los cuellos de ambas botellas tienen la misma área a - la masa m que oscila es menor.

Lo que importa es el volumen del resonador, y no su forma (para una determinada área del cuello). Esto fue comprobado experimentalmente ladeando la botella en resonancia. De este modo se cambió la forma del volumen pero no éste en sí; y el sistema no se apartó de la condición de resonancia.

En cuanto al estudio de las frecuencias siguientes a la fundamental para L' en el cuerpo de la botella, se probaron dos modelos que no funcionaron. Ellos son:

1- Suponer que la onda sonora sólo se propaga en el cuello de la botella, donde tiene ambos extremos abiertos. Esto implica $f_n = n \cdot (c/2l)$, pero las rectas $f(n)$ no tienen ordenadas nulas

2- Suponer que la onda se propaga primero en un tubo con ambos extremos abiertos (cuello), y luego en un tubo de extremos abierto y cerrado (cuerpo). Esto implica $f_1 n = n \cdot (c/2l)$ para el primer tubo y $f_2 n = (2n+1) \cdot (c/4L)$ para el segundo. Tampoco funciona, pues para cada L' debería verse el conjunto completo de las $f_1 n$, que no dependen de L' , y esto no sucede.

De acuerdo a la bibliografía consultada, las frecuencias superiores a la fundamental son relativamente altas y los correspondientes modos de vibración no son independientes de la inercia del aire en el interior de la cavidad (cuerpo de la botella). Por lo tanto, se propuso un modelo que tuviera en cuenta a la botella como un

todo: tubo con un extremo abierto y otro cerrado. Como se ve en la *Parte C*, este modelo tampoco ajusta a los valores medidos.

Es importante destacar dos hechos llamativos en dicha parte del trabajo:

-el gráfico 6 muestra un comportamiento complejo para las frecuencias, lo cual también se aprecia en las curvas de resonancia. Hay un cierto *doblete*, es decir, las frecuencias f_2 y f_3 están muy próximas entre sí, y lo mismo ocurre con f_4 - f_5 y con f_6 - f_7 , pero sin seguir un patrón evidente. Dicho comportamiento se hace más notorio en los L' más grandes, y se va perdiendo a medida que éste disminuye. Para los niveles de agua más cercanos al cuello, las f_n se van equiespaciando.

-al graficar $f(L^*)$ para n fijo, no se obtuvieron rectas como predice el modelo de tubo abierto, sino que las curvas son muy bien ajustadas por polinomios de orden 5 y no por ningún otro polinomio de orden menor. Esto implicaría que, dado n , f es un polinomio de orden 5 en c/L^* .

VI. CONCLUSIONES

La velocidad del sonido fue hallada por dos métodos diferentes: mediante el modelo de resonador de Helmholtz aplicado al cuerpo de la botella y con el modelo de tubo abierto aplicado al cuello de la botella. El porcentaje del error obtenido con cada método es aproximadamente igual (3.7% para el cuerpo y 3.1% para el cuello). Con respecto a la medición, los métodos son idénticos: se usa el mismo dispositivo y se procede de la misma forma. Cada uno de los métodos tiene ciertas ventajas respecto del otro:

-el método del cuello permite obtener c a partir de la recta $L^* (1/f_0)$ en una forma más inmediata que la que da c de la recta $L' (1/f_0^2)$ en el cuerpo.

-para el modelo de Helmholtz sólo es posible usar la frecuencia fundamental

mientras que para el modelo de tubo abierto, c se puede obtener trabajando con cualquiera de las frecuencias.

-para un mismo esfuerzo de medición, el modelo del cuerpo arroja más información que el del cuello pues, además de c , da la longitud del tapón de aire, de donde saca l , mientras que en el modelo del cuello, hay que estimar l para poder hallar c .

-si bien el procedimiento experimental es el mismo en ambos casos, el método del cuerpo requiere medir las áreas del cuello y el cuerpo, mientras que en el otro método, estos datos no son necesarios.

Se puede concluir que si el único objetivo es medir c , convendría utilizar un tubo (teniendo en cuenta el cálculo de l), pero si además se busca conocer en forma precisa dicho l , entonces convendría trabajar con un resonador.

Por otro lado, los resultados correspondientes al modelo de resonador de Helmholtz (velocidad del sonido, longitud del tapón de aire, estudio comparativo de dos resonadores diferentes) se ajustan perfectamente a éste. Esto, sumado a gráficos y mediciones ya mencionadas, destinadas a evaluar la validez de las aproximaciones (gráfico 2, medición con la botella ladeada), indican que

dichas aproximaciones son suficientes dentro de los objetivos del trabajo. Por esta razón, efectos de borde - boca de la botella y transición entre el cuerpo y el cuello- pueden ser ignorados trabajando bajo las aproximaciones mencionadas.

Queda sin resolver el problema de hallar un modelo que prediga los resultados experimentales hallados para las frecuencias del resonador superiores a la fundamental. Este trabajo puede servir de base para un estudio profundo en la búsqueda de dicho modelo, pues contiene los datos experimentales necesarios, descarta algunas posibilidades y muestra funciones que -aún sin explicar la relación entre los distintos modos- logran ajustarlos individualmente.

VII. APÉNDICE

*nota: todos los ajustes lineales fueron realizados con el método de cuadrados mínimos mediante el soft Origin 3.5

Errores en la medición de la velocidad del sonido.

$c^2 = p \cdot 4\pi^2 l(A/a)$ donde p es la pendiente de la recta.

$\Delta c/\pi = (Al/ap)^{1/2} \Delta p + (lp/aA)^{1/2} \Delta A$

$+ (Ap/al)^{1/2} \Delta l + (Alp/a^3)^{1/2} \Delta a$

Modelo de tubo abierto

A) $f_n = (1/2) \cdot (c/L^*) \cdot n + (1/4) \cdot (c/L^*)$

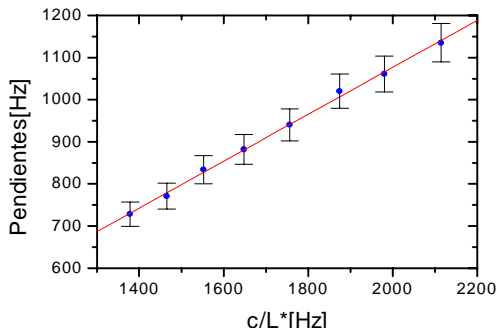
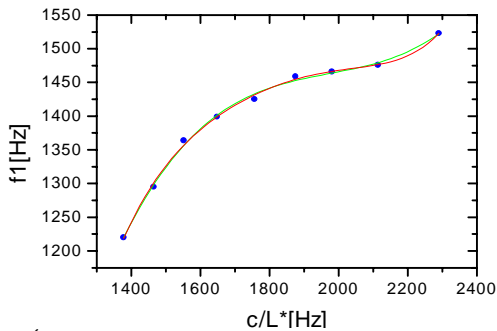


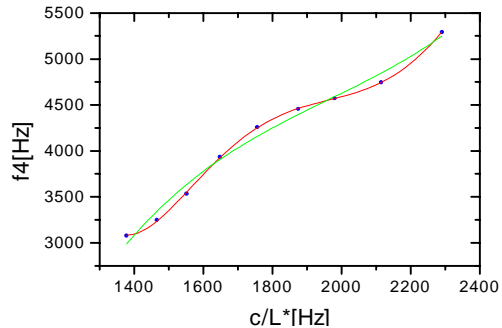
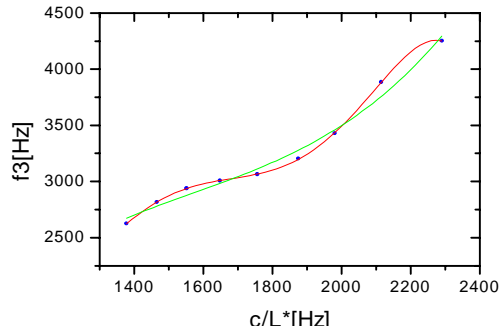
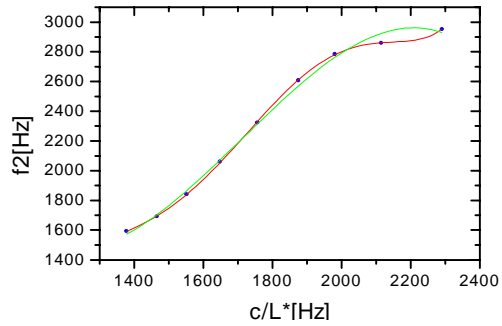
GRÁFICO. Pendientes de la recta $f_n(n)$ en función de c/L^*

B) $f_n(L^*) = (2n+1)/4 \cdot c/L^*$

No trabajamos con la frecuencia fundamental pues ésta ya tiene un modelo adecuado (resonador de Helmholtz).



GRÁFICOS. Frecuencias de resonancia en función de c/L^* para $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$. - ajuste con un polinomio de orden 3; - ajuste con un polinomio de orden 5.



Referencias

1. -R. Resnick y D. Halliday, *Física Parte I*, Wiley, New York, 1966.
2. -M. Y. Coby, *Sound Waves and Acoustics*, Henry Holt and Company, New York, 1938.
3. -A. Wood, *Acoustics*, Interscience Publishers Inc., New York, 1941.
4. -A. T. Jones, *Sound*, D. Van Nostrand Company Inc., New York, 1937.
5. -R. E. Berg, D. G. Stork, *The Physics of Sound*, Prentice Hall Inc., 1982.
6. -J. W. S. Rayleigh, *The theory of sound*, New York Dover Publications, 1945.
7. -F. S. Crawford, Jr., *Ondas*, Editorial Reverté S. A., 1991.
8. -G. R. Berg, P. D. Loly, *The great beer bottle experiment*, Am. J. Phys. 47, 515-518, 1979.
9. -R. Blickensderfer, *The Helmholtz Resonator and log-log plots*, Phys. Teach. 21, 111-112, 1983.
10. -T. B. Greenslade, Jr., *Experiments with Helmholtz Resonators*, Phys. Teach. 34, 228-230, 1996.
11. -M. P. Silverman, E. R. Worthy, *Musical Mastery of a Coke Bottle: Physical Modeling by Analogy*, Phys. Teach. 36, 70-74, 1998.